

## Annexe A

---

# Théorie des fractales et écologie

## A.1 PROBLÈME BIOLOGIQUE GÉNÉRAL : LA GÉOMÉTRIE DE LA BIOMASSE

### A.1.1 Exagération nécessaire des surfaces par rapport aux volumes

Dans tous les systèmes vivants, quelles que soient leurs tailles, la biomasse ne reste vivante et garde ses propriétés que si elle est traversée de flux de matière et d'énergie ininterrompus. Ces flux « travaillent » sur des masses, donc sur des volumes, mais entre et sortent du système par des surfaces de contact avec le milieu – qu'il s'agisse du milieu extérieur pour un organisme autonome, ou du milieu intracellulaire pour une mitochondrie ou tout autre organite. Dans tous les cas, *des volumes sont gérés par des surfaces*.

Cela pose un problème de géométrie. Lorsqu'un objet croît de façon homothétique (= sans modification de sa forme), ses surfaces augmentent moins vite que ses volumes. Par exemple, une sphère de rayon  $R$  a une surface externe égale  $4\pi R^2$  et un volume égal à  $(4/3)\pi R^3$  : son rapport surface/volume est proportionnel à  $(1/R)$ , il décroît quand  $R$  augmente. Inversement, si l'on fragmente un objet, on crée de nouvelles surfaces alors que le volume ne change pas.

En conséquence, pour une biomasse en train de s'accroître, il est impératif que toutes les surfaces de contact (surfaces d'échanges) augmentent plus vite que par simple croissance homothétique – et ce, à toutes les échelles d'observation. Elle y parvient par plusieurs « techniques ».

### a) Fragmentation des volumes

Pour la raison évoquée, les surfaces augmentent considérablement, le volume total restant inchangé, si ce dernier se fragmente. Les fragments peuvent se fragmenter à leur tour, et ainsi de suite.

On constate dans tous les milieux naturels qu'une grande partie de la biomasse est constituée de cellules séparées : Bactéries comme Protozoaires se multiplient en se divisant puis en se détachant les uns des autres (Fig. A.1.a). Les organismes pluricellulaires adoptent d'autres méthodes.

### b) Acquisition d'une géométrie ramifiée, ou plissée, ou lacunaire, ou rugueuse

Grâce à des processus de ramification, d'invagination/évagination, etc., se produisant au cours du développement et de la croissance de l'organisme, le taux d'augmentation des surfaces arrive à concurrencer celui des volumes (Fig. A.1.b).

De telles géométries sont très générales dans l'anatomie des organismes, des organes et des tissus. De leur fait, chaque cellule vivante se trouve, sinon en contact direct avec le milieu, du moins très proche de lui, rendant possible des échanges qui ne le seraient pas si la géométrie des organes restait globuleuse et convexe.

Ainsi, les poumons des Mammifères comprennent des bronches et des bronchioles qui se ramifient plus de vingt fois avant d'aboutir aux alvéoles dont les parois, elles-mêmes plissées, collent à un réseau de capillaires sanguins ramifiés. Un poumon humain présente ainsi à l'atmosphère une surface de contact de quelque 400 m<sup>2</sup>, et les vaisseaux sanguins qui en partent se rassemblent, puis se ramifient à nouveau dans les organes, véhiculant le sang jusqu'à proximité immédiate de chaque cellule. Ainsi chaque cellule respire. De la même façon, un système nerveux multi-ramifié fait communiquer entre elles toutes les parties de l'organisme.

Dans une Phanérogame, les arborescences des branchages et des racines, le parenchyme alvéolaire des feuilles, ainsi que les réseaux mycéliens des Champi-



**Figure A.1** Géométries de la biomasse tendant à lui faire acquérir, à volume donné, une surface de contact maximale avec son environnement. a) fragmentation ; b) arborescence.

gnons symbiotiques (mycorhizes) assurent un contact intime de la biomasse végétale avec l'atmosphère d'une part, le sol d'autre part, selon une géométrie généralement qualifiée d'« inextricable ».

À l'intérieur des cellules, mitochondries et plastes ont une géométrie plissée et invaginée qui augmente considérablement les surfaces catalytiques de ces « usines énergétiques ».

*c) Circulation des fluides ou déplacements de particules et d'individus au sein de cette géométrie ramifiée*

Les mouvements des fluides et des individus renouvellent sans cesse les surfaces de contact entre la biomasse et le milieu ambiant, ou entre les populations de proies et celles de prédateurs, intensifiant tous les types d'échanges. Les modes *a)* et *b)* réalisent une stratégie d'occupation de l'espace ; *c)*, de l'espace-temps.

*d) Utilisation à bon escient, par les organismes vivants, de la géométrie fragmentée du milieu physique*

La fragmentation du substrat solide – sol ou sédiment – permet sa percolation par des substances mobiles et sa pénétration par des organismes de petite ou moyenne taille, par des radicelles et des racines, des mycéliums etc.. Dans les milieux fluides – eau et atmosphère – la matière vivante utilise à bon escient la turbulence, faite de tourbillons de toutes tailles qui renouvellent sans cesse l'environnement physique, évitant ainsi les phénomènes locaux d'épuisement ou de surcharge en diverses substances.

Mieux encore, les organismes favorisent, créent ou accroissent cette fragmentation du milieu physique. Les racines contribuent à fissurer la roche, puis ameublissent et brassent le sol en permanence. Des animaux de toutes tailles créent des réseaux de galeries de toutes tailles par où circuleront l'eau, les substances dissoutes et les gaz. Un banc de Mollusques, fixé sur un fond marin dans une zone de courants suscite, par sa rugosité, une turbulence qui brasse l'eau sus-jacente, entraînant jusqu'au niveau des animaux les particules nutritives qu'elle contient.

### **A.1.2 Une caractéristique fondamentale de cette géométrie spatio-temporelle : sa structure hiérarchique**

Ce fait ne doit pas nous étonner. Nous avons évoqué, dans ce livre, la nécessité d'une organisation hiérarchique dans tout réseau d'organisation complexe. Or toute l'organisation vivante s'inscrit dans l'espace-temps ; on retrouve donc la hiérarchie dans la géométrie elle-même de la biomasse. En voici quelques exemples.

*a) Géométrie hiérarchisée de la biomasse*

Elle est évidente dans les **arborescences**, et dans diverses figures d'invagination et d'évagination des anatomies. Au cours de la croissance de l'objet vivant, le même processus se répète de bifurcation en bifurcation ; en conséquence la même figure est répétée d'échelles d'observation en échelle d'observation, sur

tout un intervalle d'échelles spatiales. Branches et racines principales se divisent en éléments de plus en plus petits et nombreux<sup>1</sup> ; il en est de même des artères, des nerfs, etc.

### b) Granulométrie d'un substrat

Elle s'établit par fragmentation, dans un sol ou un sédiment, de blocs de plus en plus petits. La hiérarchie peut toutefois opérer dans l'autre sens, c'est-à-dire par agglomération : un flocon de neige ou une dendrite se forment par apports successifs de molécules, selon une géométrie ramifiée. Voir aussi exemple du § A.2.3.e.

### c) Turbulence hydrodynamique

Dans l'eau ou dans l'air, chaque tourbillon donne naissance, par frottement et « cisaillement » contre le fluide qui l'environne, à plusieurs tourbillons de plus petite taille. Ces derniers en font autant, et ce jusqu'à l'échelle moléculaire (échelle de la viscosité). La dispersion ou **diffusion turbulente** des substances dissoutes et des particules en suspension, par cette « cascade » de tourbillons, est des centaines de fois plus rapide que la simple **diffusion moléculaire**. Or de nombreux processus biologiques dépendent, en milieu aquatique, de la rencontre de masses d'eau de caractéristiques différentes et complémentaires. La turbulence assure un contact intime et renouvelé entre ces masses d'eau.

Par exemple, la production primaire exige la rencontre (« covariance »), au sein d'une couche d'eau illuminée, de cellules chlorophylliennes ayant proliféré dans l'eau chaude de surface, et de sels nutritifs ou nutriments (nitrates, phosphates...) en provenance de l'eau froide profonde. Si le contact entre les deux masses d'eau se faisait suivant une surface lisse (dôme hémisphérique ou plan oblique), trop peu de cellules vivantes se trouveraient en contact avec l'eau riche en nutriments, pour que s'établisse localement une production primaire importante. En fait, le déplacement relatif des deux types d'eaux engendre des cisaillements, origine de turbulences et de repliements de nappes d'eau de plus en plus minces (voir aussi Annexe B : dynamique chaotique de la turbulence). La surface de contact entre l'eau chaude riche en chlorophylle, et l'eau froide riche en sels nutritifs s'en trouve augmentée dans des proportions considérables. Il est nécessaire que la turbulence intervienne jusqu'à l'échelle des cellules vivantes, évitant les phénomènes d'épuisement et de saturation à leur contact. Un « feuilletage » de l'eau mêlée assurera un contact chlorophylle-nutriments à l'échelle cellulaire, ainsi qu'un renouvellement incessant de ce contact, à l'intérieur d'un « volume d'interpénétration » des deux eaux.

---

1. On discute encore sur les règles géométriques de la croissance végétale, par exemple sur l'invariance ou non des surfaces totales des sections droites, dans la succession des ramifications. En principe, la section totale devrait rester constante afin d'assurer la bonne circulation des liquides. En fait, elle doit augmenter de ramification en ramification, car en diminuant de section, les canaux augmentent leur surface de contact avec le liquide, donc leur résistance à l'écoulement. En outre l'arborescence foisonnante nécessite le développement de tissus de soutien, d'où l'augmentation des sections.

### A.1.3 Description de la géométrie hiérarchisée par une distribution statistique. La « cascade ». L'invariance d'échelle

La succession de processus répétés d'échelle en échelle a été appelée la « cascade » fractale. Parfois les étapes sont bien séparées. Les structures sont alors faites de parties successives de tailles nettement distinctes, ou « discrètes ».

D'autres fois, ces étapes apparaissent de façon plus floue : par exemple, dans la géométrie d'un arbre, il y a une certaine indétermination dans le point d'émergence d'une branche, comme dans la taille qu'elle va avoir.

Souvent enfin, on ne distingue plus du tout d'étapes : le processus est d'allure continue, et il n'existe pas d'échelles d'observation privilégiées. Par exemple, il est impossible de classer les branches d'un arbre sans ambiguïté selon leur taille et leur ordre d'apparition : la seule contrainte est que chaque branche donne naissance à une ou plusieurs branches plus minces. C'est le cas aussi dans tout processus de fragmentation progressive d'un matériau. En ce cas, la géométrie d'ensemble est décrite par une **distribution** statistique des tailles parmi les éléments de la hiérarchie.

Notons qu'une distribution statistique existe dans tous les cas, mais lorsque la « cascade » est sans ambiguïté, cette distribution est discrète<sup>1</sup> (Fig. A.2.a). Dans les autres cas elle est continue (Fig. A.2.b).

Le problème se pose alors de s'en faire une idée à partir d'un échantillon fini, prélevé sur l'objet. Quand l'échantillon est assez grand, on peut établir un histogramme des tailles des composants, en définissant un nombre correct de classes, selon une progression par exemple arithmétique ou géométrique.

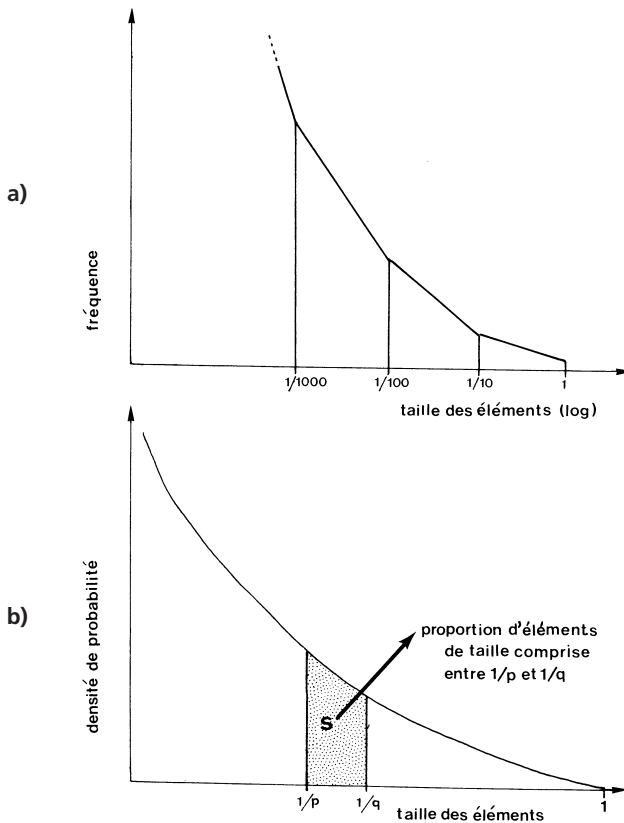
Une représentation plus lisible encore (surtout si l'échantillon est petit) est obtenue en construisant une **courbe de fréquences cumulées ou rétrocumulées** : pour une valeur  $l_i$  de la taille linéaire, on portera en ordonnées la proportion de composants de tailles  $\leq l_i$ . (fréquences cumulées) ou  $\geq l_i$ . (fréquences rétrocumulées). Nous utiliserons ici les fréquences rétrocumulées, en considérant des composants de plus en plus petits, et en notant leurs effectifs de plus en plus grands (Fig. A.3).

D'autres exemples de « cascades » ayant un impact en écologie sont rencontrés dans la distribution des tailles d'organismes, dans celle des tailles des grains d'un sol ou d'un sédiment (Frontier *et al.*, 2001 : § 2.3.5.d), dans la répartition spatiale des organismes (Fig. A.4), dans les trajectoires des prédateurs en quête de proies (même Figure).

Les deux dernières caractéristiques sont liées. Les organismes occupent en général une surface ou un volume de biotope selon des taches, paquets, essaims etc. (en anglais *patches*) : c'est le phénomène de dispersion agrégative ou surdispersion (*patchiness*), bien connu en écologie terrestre ou aquatique (Frontier *et al.*, 2001 : § 4.5.3.e).

Ces taches sont hiérarchisées, c'est-à-dire emboîtées : taches d'une certaine taille moyenne formées d'un groupe de taches plus petites, et par ailleurs groupées en taches plus grandes : la « cascade » est évidente dans son principe – toutefois, les

1. Pour la définition et les méthodes d'étude des distributions discrètes et continues, voir Frontier *et al.*, 2001 : § 2.3.



**Figure A.2** Distributions de fréquences de la taille (en dimension linéaire) des éléments d'une géométrie fractale.

a) Objet fractal régulier (chaque étape de la cascade donne lieu à des éléments d'une même taille : la distribution est discrète. b) Objet fractal statistique : la distribution est continue. La surface tramée sous la courbe est proportionnelle au pourcentage d'éléments de taille linéaire comprise entre  $1/p$  et  $1/q$  (la dimension linéaire de l'objet entier étant prise égale à 1).

taches d'un même niveau ayant des tailles variables, la hiérarchie peut être floue, et sa description se fera sous forme d'une distribution continue.

Quand un prédateur utilise une ressource répartie de cette façon dans l'espace, il adapte son comportement à cette géométrie. Il suit d'abord une route peu erratique, jusqu'à ce qu'il rencontre les premières proies un signe de leur présence. Sa recherche devient alors plus précise, et il explore de façon plus ou moins aléatoire une aire plus restreinte. Enfin, ayant capturé une proie et si celle-ci ne lui suffit pas, il va s'activer au voisinage de cette première capture. En effet, par définition de la « répartition agrégative » (§ 6.1.3.b et Frontier *et al.*, 2001 : § 4.5.3.e), l'observation d'un individu en un point rend plus probable la présence d'autres individus de la même espèce à proximité. En conclusion, la trajectoire et le comportement du prédateur sont eux aussi hiérarchisés, et l'on y décèle une « cascade » à la fois dans l'espace et dans le temps.

Dernière particularité de cette géométrie : la hiérarchie et la « cascade » ne sont observées que sur un nombre fini d'étapes, autrement dit sur un intervalle fini d'échelles d'observation – alors que, comme nous le verrons plus loin, le modèle mathématique théorique s'étend sur une infinité d'étapes. Un arbre se ramifie 10 fois ;

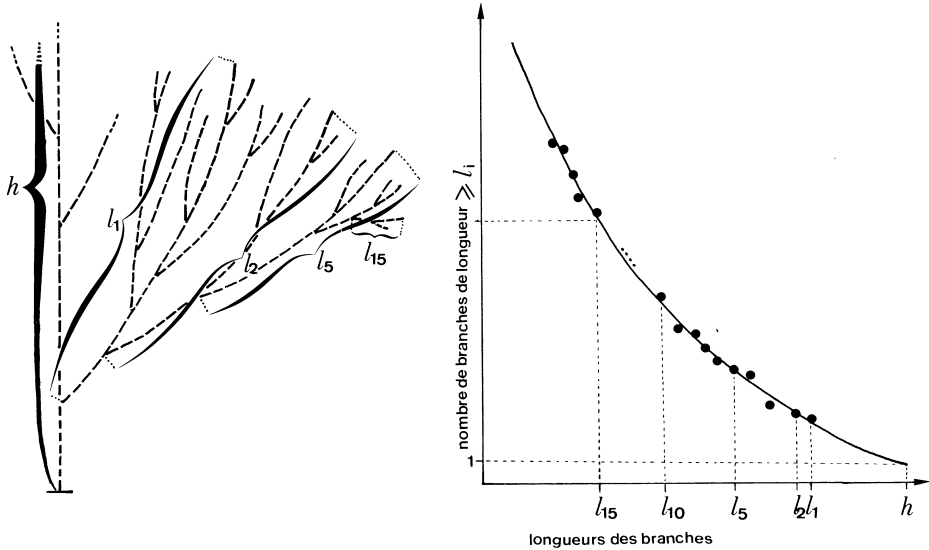


Figure A.3 Description statistique d'une figure arborescente.

Les bifurcations successives sont notées 1, 2, 3... dans l'ordre décroissant des longueurs totales des branches qu'elles initient ( $l_1, l_2, l_3...$ ). La courbe est celle des fréquences rétrocumulées de la variable  $l$ . Le plus petit rameau terminal mesure  $h$ . L'ordonnée d'un point d'abscisse  $l_j$  mesure la fréquence (relative ou absolue) des branches de longueur totale  $\geq l_j$ , que la distribution soit discrète ou continue.

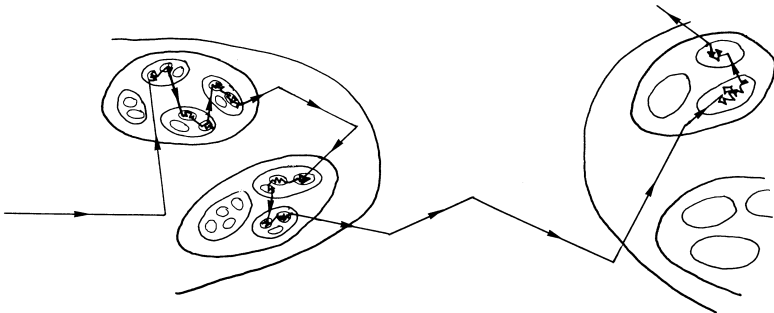


Figure A.4 Correspondance entre la géométrie de la répartition spatiale d'une espèce proie, et celle de la trajectoire d'un prédateur.

La proie a une répartition agrégée (les contours emboîtés représentent des lignes de niveau de l'abondance). Le prédateur (segments fléchés) s'attarde dans les lieux où il trouve beaucoup de nourriture ; quand il n'en trouve pas, son trajet reflète un comportement de recherche, avec de plus longs segments séparés par des changements de direction. Nous conjecturons, sans l'avoir encore démontré, que ce trajet du prédateur se rapproche d'un **mouvement brownien fractionnaire** (voir § A.4.2).

un poumon, 20 fois ; et quand les étapes ne sont pas clairement distinctes (distribution continue), la géométrie fractale est respectée entre une taille maximale et une taille minimale de l'objet potentiel (par exemple, continûment entre la taille des grains de limon et celle des rochers, sans étapes discrètes).

- Au-delà de l'ultime rameau d'un arbre il ne pousse pas un rameau encore plus petit, mais une feuille, dont le parenchyme vacuolaire assure une grande surface de contact avec l'atmosphère, en obéissant à une autre géométrie. Du côté des grandes tailles, un arbre n'est pas branche d'un arbre encore plus grand, mais élément d'une forêt, « volume d'interpénétration » entre la couche superficielle terrestre et l'atmosphère, grâce auquel le carbone pénètre dans la roche et se mêle à elle, donnant un sol. Forêt, arbre individuel et feuille réalisent trois géométries fractales distinctes, celle de l'arbre existant entre l'échelle du décimètre et celle de la dizaine de mètres.
- De la même façon, au-dessous du grain de limon, on observe la géométrie des cristaux minéraux. Au-dessus du rocher, on observe la « rugosité » du paysage, puis de la surface terrestre – autant de géométries distinctes.

Ces géométries diverses ont des points communs. Une caractéristique les relie, appelée **autosimilarité**, ou **autosimilitude**, ou **homothétie interne**, ou encore **invariance d'échelle**, signifiant en substance que toute partie est un modèle réduit du tout. Une branche avec ses ramifications est le modèle réduit d'un arbre. Nous en verrons plus loin une formulation mathématique. Si ce modèle mathématique était parfaitement réalisé il serait impossible, en examinant une photo de l'objet, de savoir à quelle échelle elle a été prise.

En réalité, l'invariance d'échelle n'a lieu qu'entre deux échelles d'observation. Si un arbre montre 10 ramifications successives, une de ses branches peut n'en montrer que 5. Le modèle sera un objet théorique tel que le processus d'auto-reproduction (fragmentation, ramification...) soit reproduit à l'infini, dans le sens des grandes tailles comme dans celui des petites tailles. De telles constructions théoriques ont été appelées des **fractales** ou des **objets fractals** par Mandelbrot (1975 et suiv.). *La géométrie fractale est une géométrie du fractionnement hiérarchisé de la matière.*

Nous montrerons qu'il existe également des **fractales abstraites**. La diversité spécifique, par exemple, apparaîtra (§ A.5) comme une propriété fractale de la biomasse, celle-ci étant partitionnée en espèces distinctes, d'abondances obéissant à une loi hiérarchique (souvent une loi puissance).

## A.2 CARACTÉRISATION MATHÉMATIQUE DES FRACTALES

### A.2.1 Géométrie euclidienne et géométrie fractale

La géométrie euclidienne décrit le monde en termes de points (dimension 0), de lignes (dimension 1), de surfaces (dimension 2) et de volumes (dimension 3). Dans cette vision, qui correspond à notre technicité (il n'est qu'à soulever le capot d'une voiture...) la nature, et particulièrement la nature vivante, nous paraît d'une « géométrie inextricable ». Les formes sont contournées, foisonnantes et morcelées



à l'extrême, ce qui permet une interpénétration de matériaux complémentaires les uns aux autres, entre lesquels les flux de matière, d'énergie et d'information sont intensifiés, et peuvent **s'organiser**.

L'Homme, colonisant l'espace qui lui est attribué, y crée, aux échelles de son activité, une telle géométrie. Le réseau routier, qui comprend des voies de toutes tailles (des autoroutes aux sentiers) ramifiées et interconnectées, évitant les obstacles, et reliant tous les lieux destinés à interagir, montre une géométrie rappelant celle des racines ou des mycéliums dans le sol. A d'autres échelles au contraire, la géométrie fractale nous est plutôt un handicap. Nous nous efforçons alors de la remplacer par une géométrie localement euclidienne : nous égalisons les terrains, supprimons tout ce qui dépasse et tous les creux, rectifions les côtes, remplaçons la « nature sauvage » par le « jardin » – quitte à se passer des propriétés originales, parfois irremplaçables, d'un habitat fractal ; mais la maîtrise des géométries inextricables nous manque.

Des techniques, pourtant y font appel. Les catalyseurs ne sont performants que s'ils présentent une surface considérable sous un faible volume ; la percolation des liquides dans les roches se fait à travers un réseau fractal de fissures ; etc.

### A.2.2 Principe de la construction d'une figure fractale : l'homothétie interne ou autosimilarité

La géométrie fractale, objet de nombreux travaux actuels (de plus en plus abstraits en même temps que de plus en plus appliqués) est due à Mandelbrot (1975 et suiv.). Le lecteur en trouvera des exposés abordables par exemple dans Peitgen *et al.* (1991, 1992), Gouyet (1992), Hastings & Sugihara (1993), et dans une BD de Stewart (1982).

#### a) *How long is the coast of Britain ?*

Tel est le titre d'un des chapitres emblématiques de Mandelbrot. La « longueur » de la côte de Bretagne est infinie, comme toute côte accidentée naturelle, en dépit des assertions officielles et/ou médiatiques du type « la France possède 6 000 km de côte ».

Considérons le tracé d'une côte rocheuse et mesurons la distance en se deux points, en suivant toutes les sinuosités, sur des cartes à différentes échelles. On s'aperçoit que la « longueur de côte » n'est pas définie mais varie avec l'échelle de la carte employée. Il ne s'agit pas d'erreurs de mesure, rectifiables par examen d'une carte plus détaillée, mais d'une différence de 1 à 10, ou à 100, ou à 1 000 selon les échelles. En effet, une carte détaillée prend en compte des sinuosités qui n'apparaissent pas sur une carte à grande échelle<sup>1</sup>, et qui décuplent ou centuplent la longueur mesurée. Comme il n'y a pas de limite théorique à la finesse de la reproduction (on peut faire le tour des grains de sable !), la longueur mesurée tend vers l'infini quand

1. Pour la signification de « grande échelle » et de « petite échelle » utilisée respectivement en géographie et en écologie, voir note infrapaginale p. 308.

le détail devient extrême. De même, si l'on veut compter le nombre d'îles et îlots (eux aussi, souvent dénombrés officiellement), ce nombre tend vers l'infini lorsque la taille des îles prises en compte devient de plus en plus petite.

En outre, quand la taille des éléments devient très petite, il intervient dans leur dénombrement un flou lié à l'opération de mesure. Dans les deux exemples précédents, le niveau fluctuant de la mer par rapport à la terre émergée rend imprécise la mesure de la « longueur » de l'interface et le recensement des cailloux émergés.

Précisons : supposons que nous ayons déterminé une longueur de côte entre deux points sur une carte à une certaine échelle – c'est-à-dire mesuré le tracé cartographique, puis appliqué le facteur d'échelle. Examinons maintenant le même segment de côte sur une carte à plus « grande échelle » au sens des géographes (carte plus détaillée) : une petite portion de côte se traduisant sur la première carte par un court segment lisse (1 mm par exemple) va être amplifié sur la seconde, révélant d'autres détails qui, une fois le nouveau facteur d'échelle appliqué, allongeront la longueur mesurée. À une échelle encore plus grande, nouveaux détails, et côte encore plus longue ; et ainsi de suite.

Autre façon de procéder : choisissons le tracé le plus détaillé possible entre deux points A et B de la côte. On le mesure en comptant un nombre des « pas » d'un arpenteur (le « bâton de pèlerin » de Mandelbrot), puis on obtient une estimation de la longueur de côte en multipliant ce nombre par la longueur du pas. Plus le pas est petit, plus la longueur calculée est grande, puisqu'alors l'arpentage prend en compte des détails ignorés à l'étape précédente. La longueur mesurée augmente quand la longueur de référence diminue (Figs. A.5 et A.13). Cette croissance est loin d'être négligeable : une longueur variera, par exemple, du simple ou double<sup>1</sup> selon qu'on l'arpente avec des distances rectilignes (« à vol d'oiseau ») de 1 km ou de 100 km.

Une constante apparaît (qui nous servira à caractériser l'objet par une **dimension fractale** : voir plus loin), à savoir *le rapport entre l'augmentation de la longueur mesurée et la diminution du pas d'arpentage*<sup>2</sup>.

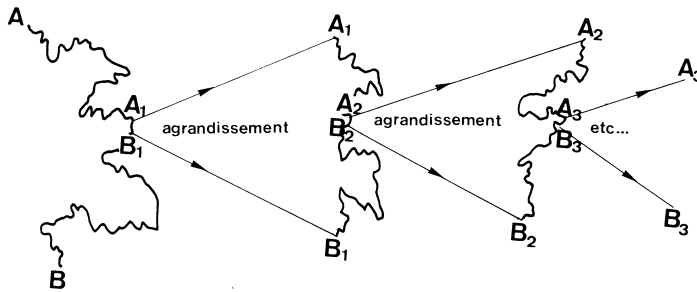
### b) Autres exemples

On ferait la même constatation en considérant une zone de delta, avec ses bras d'eau ramifiés à l'infini, chaque ruisseau se ramifiant lui-même « théoriquement »

1. Anecdote : les longueurs de la frontière entre l'Espagne et de Portugal sont différentes à en croire les encyclopédies des deux pays, simplement parce que les géographes ont utilisé, pour l'établir, des cartes d'échelles différentes, prenant en compte des détails différents.

2. Ne pas confondre le pas d'arpentage avec l'unité de mesure. Celle-ci n'influe pas sur la longueur mesurée, mais seulement sur son expression en cm, m, km... L'arpentage d'une longueur de côte rocheuse de 1000 m = 1 km = 100 000 cm à vol d'oiseau, avec des pas de 1 m, exigera par exemple 8000 pas, d'où une longueur mesurée de 8000 m = 8 km = 800 000 cm. Le rapport des deux mesures est le même quelle que soit l'unité de longueur choisie, le « pas » ne variant pas. Si au contraire le pas d'arpentage est 100 fois plus petit (1 cm), la longueur mesurée est de 3 200 000 cm = 32 km. La **dimension fractale** (voir paragraphe suivant) est :

$$d = \frac{\log 8\,000}{\log 1\,000} = \frac{\log 3\,200\,000}{\log 100\,000} \# 1,30103$$



**Figure A.5** Agrandissements successifs d'une ligne « infiniment irrégulière », telle que l'évoque une côte rocheuse (fractale statistique).

À chaque étape de l'agrandissement, de nouveaux détails sont pris en compte. Ce qui apparaissait à l'étape précédente comme un petit segment rectiligne, devient une portion de côte montrant le même type d'irrégularité que l'ensemble précédent (autosimilarité statistique). La longueur totale mesurée entre les points A et B initiaux croît indéfiniment quand la finesse de la description augmente.

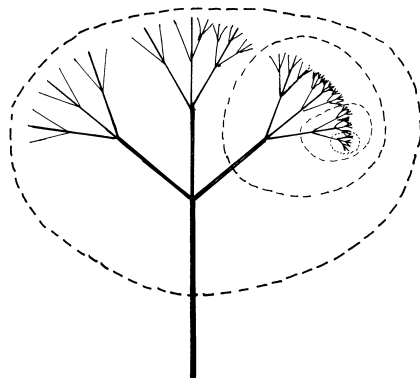
à l'infini. La longueur totale de cours d'eau tend vers l'infini à mesure que l'on prend en compte des ruisselets plus petits.

De même avec des énumérations d'éléments : îles inventoriées dans un archipel, le « pas » étant les ici le diamètre des îles ; ou rameaux d'une arborescence, dont le nombre tend vers l'infini quand la longueur des rameaux diminue. De même avec des surfaces : la surface totale d'une rugosité, ou la surface totale de contact d'une éponge avec l'eau ambiante, tendent vers l'infini si on les mesure au moyen d'éléments de recouvrement de plus en plus petits et nombreux.

Dénombrements, lignes et surfaces « rugueuses » et arborescences montrent les mêmes caractères statistiques, à l'échelle près, d'une étape à l'autre de leurs recouvrements. Ils montrent une invariance d'échelle de nature statistique : ce sont des **fractales statistiques**. Cependant ce sont les **fractales régulières** qui nous donneront une clé pour établir ou analyser la propriété d'autosimilarité. On considère alors des objets géométriques simples, obtenus par une certaine règle de construction appelée « générateur », qui sera réitérée d'étape en étape.

Par exemple, un arbre stylisé tel que celui de la Fig. A.6 se construit partant d'une figure de départ appelée **initiateur** – en l'occurrence un simple segment de droite de longueur arbitraire (prise comme unité). Le **générateur** est ici le suivant : à mi-hauteur du segment initiateur apparaissent deux branches de longueurs égales à  $1/2$ . A l'étape suivante, chacun des trois segments de longueur  $1/2$  donne deux nouvelles branches homothétiques des premières, d'où trois branches de longueur égale à  $1/4$ . Et ainsi de suite, indéfiniment. Ainsi, le même processus générateur est répété à chaque étape, seule variant la longueur des branches successives. On peut démontrer que non seulement le nombre de branches, mais aussi la longueur totale du branchage, tendent vers l'infini.

Tout sous-ensemble de l'arbre généré à une étape quelconque de la construction, est un modèle réduit de l'arbre complet. On appelle cette propriété l'**autosimilarité**



**Figure A.6** Arbre « stylisé » (fractale régulière).

Chaque branche ramifiée est un modèle réduit du tout : il y a **homothétie interne** ou **autosimilarité** ou **invariance d'échelle**. Le processus de ramification se poursuit, en théorie, indéfiniment, tant vers les petites que vers les grandes tailles.

ou **invariance d'échelle**. Chaque branche étant elle-même ramifiée à l'infini<sup>1</sup>, on peut compléter la figure représentée en considérant que l'arbre initial est branche d'un arbre plus grand... et ainsi de suite vers des tailles de plus en plus grandes : l'arbre « théorique » est infini dans les deux sens. L'unique invariant est le processus générateur, qui se poursuit de 0 à  $+\infty$  sans que l'arbre théorique change d'aspect.

Au total, l'« arbre théorique » est de longueur infinie. Il se déploie, sans les remplir, dans un plan (2D), ou dans un espace à 3 dimensions (3D), ou même dans un espace à  $N$  dimensions ( $ND$ ). Mais il reste, dans cette représentation, de largeur nulle, de sorte que sa surface et son volume sont nuls<sup>2</sup>. Il représente un mode d'occupation de l'espace dans lequel il est immergé, ligne foisonnante infinie ne pouvant remplir entièrement aucune portion convexe de cet espace, mais traduisant néanmoins une certaine « densité » ou « degré d'occupation de l'espace » – concept facilement transposable aux objets concrets, tels qu'un buisson plus ou moins touffu.

Ce concept de « degré d'occupation » sera clarifié par introduction de la **dimension fractale** d'un tel objet (cf. paragraphe suivant).

Autre exemple : l'image d'une éponge (surface délimitant une infinité de cavités de toutes tailles, les plus petites greffées sur les plus grandes) représente une occu-

1. Cela n'est vrai que partiellement pour un objet réel, tel que la branche d'arbre que nous considérons plus haut : branche comportant 5 ramifications successives alors que l'arbre total en comporte 10. L'auto-similarité stricte n'est valable que pour une arborescence infinie, au sein de laquelle on ne peut plus distinguer aucune échelle d'observation.

2. On peut également construire une arborescence en donnant à chaque nouveau segment une largeur non nulle dans 2D, ou un diamètre non nul dans 3D – l'un et l'autre tendant vers 0 quand le nombre d'étapes de la construction augmente. On peut ainsi définir un arbre de longueur totale infinie, mais de surface extérieure finie et/ou de volume fini, déployé dans un espace  $> 3D$  dont il n'occupe qu'une fraction petite.

pation de l'espace 3D par une surface foisonnante, d'aire limite infinie, de volume nul, n'occupant entièrement aucune portion de l'espace. L'éponge morcelle l'espace ambiant, lui imposant une sorte de « granulométrie ».

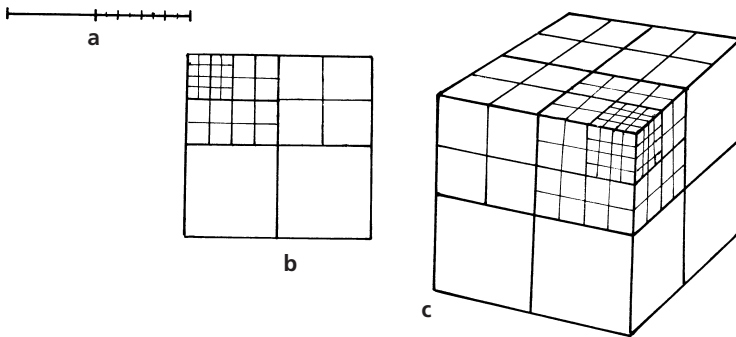
On parle souvent alors, dans une connotation macroscopique, d'un « volume d'interpénétration » entre deux matières : l'éponge ou l'arbre d'une part (matières vivantes), le milieu physique d'autre part. En réalité, il ne s'agit ni d'une ligne frontière (dimension 1), ni d'une surface de contact (dimension 2), ni d'un volume (dimension 3), mais d'un objet fractal de dimension comprise respectivement entre 1 et 2 ou entre 2 et 3, qui assure l'interface.

Le concept de « nombre de dimensions » non entier peut paraître singulier. Nous nous en expliquons maintenant.

### A.2.3 Dimension fractale

Un point est de dimension nulle ; une ligne est de dimension 1 ; une surface, dimension 2 ; un volume, dimension 3. Un objet fractal sera défini par une dimension non entière, intermédiaire entre deux de ces dernières. Il décrira un « degré d'occupation » de l'espace euclidien de dimension (entière) immédiatement supérieure.

La dimension d'une figure euclidienne est un nombre qui se présente comme un exposant lorsqu'on mesure ou qu'on divise cette figure. Si un segment de droite est divisé en 2 ( $= 2^1$ ), un carré construit sur ce segment sera divisé en 4 ( $= 2^2$ ) carrés égaux, un cube en 8 ( $= 2^3$ ) cubes égaux (Fig. A.7). Les exposants indiquent les



**Figure A.7** Figures euclidiennes : (a) segment de droite ; (b) parallélogramme ; (c) parallélépipède.

Quand on divise une figure en éléments homothétiques, sur la base d'un segment de droite divisé en  $k$  ( $k = 2$  sur la Figure), on obtient  $K$  **éléments nouveaux**  $k$  fois plus petits en dimension linéaire, avec ici  $K = k, k^2$  et  $k^3$  respectivement. L'exposant entier exprime la dimension euclidienne de la figure ( $4 = 2^2$  dans 2 dimensions ;  $8 = 2^3$  dans 3 dimensions...). Le morcellement peut être poursuivi en « cascade », avec la même règle numérique à chaque étape. Si la figure est fractale, la dimension est fractionnaire. Dans la Fig. A.6, chaque étape générerait 3 branches 2 fois plus petites en dimension linéaire. La dimension fractale était  $1,585$  car  $3 = 2^{1,585}$ .

« dimensions » (ou « nombres de dimensions ») respectives des trois figures. Or  $\log 4 = 2 \cdot \log 2$  et  $\log 8 = 3 \cdot \log 2$ . En généralisant on a, si chaque étape génère  $K$  éléments  $k$  fois plus petits en dimension linéaire :

$$K = k^d \quad \text{ou} \quad d = \frac{\log K}{\log k}$$

(la base des logarithmes étant indifférente puisqu'on passe d'une base à une en multipliant les log par une constante, donc le rapport des deux log ne change pas). Donnons quelques exemples.

### a) Arborescence

Dans l'arborescence construite Fig. A.6, chaque étape de la « cascade » génère 3 segments (sous-branches) 2 fois plus petits en dimension linéaire, d'où la dimension fractale de la figure :

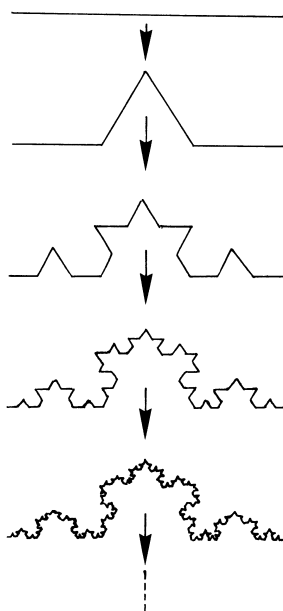
$$d = \frac{\log 3}{\log 2} \# 1,585$$

### b) Courbe de Von Koch (Fig. A.8)

Partant d'un segment de droite de longueur 1, on remplace son tiers médian par deux segments de longueur  $1/3$  orientés à  $60^\circ$ . Le même processus est réitéré sur les 4 segments ainsi générés, donnant 16 segments de longueur  $1/9$ . Et ainsi de suite.

Chaque étape génère 4 fois plus d'éléments 3 fois plus petits. La dimension fractale est donc :

$$d = \frac{\log 4}{\log 3} \# 1,262$$



**Figure A.8** Construction par étapes de la courbe de Von Koch.

La construction achevée, la courbe, toujours bornée par les deux extrémités du segment initiateur de longueur 1, comprend 4 parties identiques, toutes bornées par les extrémités d'un segment de droite de longueur  $1/3$ . On peut faire la même constatation à toutes les étapes, et finalement chaque partie est un modèle réduit – réduit dans le rapport  $(1/4)^N$  – de la courbe totale. Sa longueur est infinie. Sa surface est nulle. Seule sa mesure dans la dimension  $d = 1,262$  est finie et non nulle. Par exemple, si le segment initiateur a comme longueur 1 m, la courbe de Von Koch comprise entre ses bornes a comme longueur une infinité de mètres linéaires : «  $\infty$  m », comme surface «  $0 \text{ m}^2$  », et comme mesure dans sa dimension fractale «  $1 \text{ m}^{1,262}$  ».

On obtient bien, en réitérant à l’infini, une ligne de longueur infinie (à chaque étape la longueur précédente est multipliée par  $4/3$ , et  $(4/3)^\infty = \infty$ ), et bien sûr de surface nulle – bien que la ligne hérissée de petits triangles ressemble, macroscopiquement, à un ruban un peu flou montrant une certaine largeur. En fait, il s’agit ni d’une ligne ni d’une surface, mais d’une fractale de dimension 1,262.

c) *Éponge de Menger* (Fig. A.9)

Un cube est divisé en 27 cubes égaux, 3 fois plus petits en dimension linéaire. On retire le cube central et les 6 cubes axiaux. Le processus est répété sur les 20 cubes subsistants. Et ainsi de suite. On « creuse » ainsi indéfiniment le volume de départ. À la limite, ce qui reste est une surface infinie, de même encombrement que le volume initial, mais de volume nul.

Chaque étape a généré 29 cubes 3 fois plus petits en dimension linéaire (longueurs des arêtes). La dimension fractale est donc :

$$d = \frac{\log 20}{\log 3} \# 2,7268$$

exprimant le « degré d’occupation » d’un volume fini par une surface infiniment foisonnante.

Si, à chaque étape, on n’avait retiré que le cube central, le « volume » de la « surface infinie » serait encore nul à la fin de la construction, mais la dimension fractale serait :

$$d = \frac{\log 26}{\log 3} \# 2,9666$$

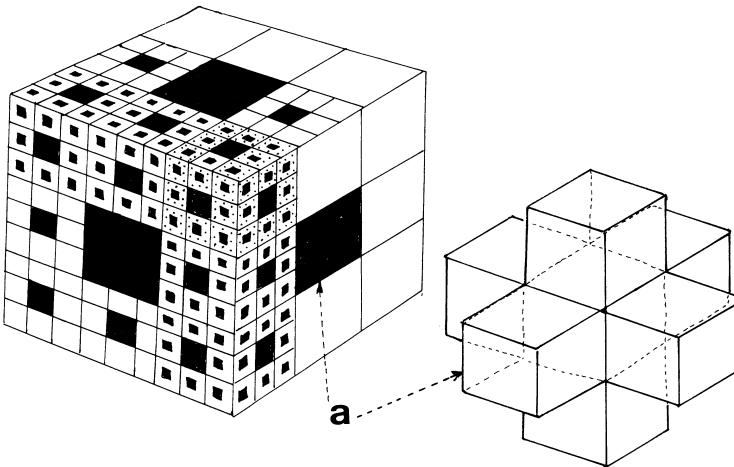


Figure A.9 Éponge de Menger.

Chaque étape laisse en place 20 cubes 3 fois plus petits en dimension linéaire :  $d = 2,727$ . **a** représente la partie du cube retirée à chaque étape (en noir sur le cube total).

d) Ensemble de Cantor (Fig. A.10)

L'initiateur est le même que pour la courbe de Von Koch : un segment de droite de longueur 1 ; mais le tiers médian est, cette fois, supprimé. Puis on supprime le tiers médian des deux segments subsistants, et ainsi de suite indéfiniment. On obtient, à la limite, une « poussière fractale » formée d'une infinité de points très inégalement répartis sur le segment de départ puisque chaque étape génère un ensemble de segments qui resteront vides à l'étape suivante.

La dimension fractale est, cette fois, inférieure à 1 :

$$d = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,6309$$

Il s'agit du « degré d'occupation » d'une ligne par une poussière (très structurée) de points.

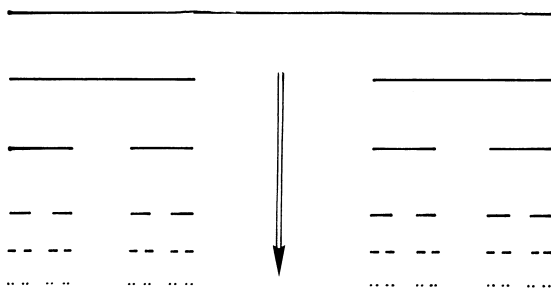


Figure A.10 Ensemble de Cantor ou « poussière fractale ».

Chaque étape de la construction laisse en place 2 segments 3 fois plus petits :  
 $d = 0,6309$ .

e) Carrés de points (Fig. A.11)

L'initiateur est constitué des 4 sommets d'un carré. À chaque étape, chaque point est remplacé par 4 points (dont lui-même) disposés en carré à l'intérieur du carré précédent.

La dimension fractale dépend du rapport entre les côtés de deux carrés successifs. Si un des quatre côtés générés par une étape est d'une dimension linéaire 6 fois plus petite que le côté du carré précédent, la dimension est :

$$d = \frac{\log 4}{\log 6} \approx 0,7737$$

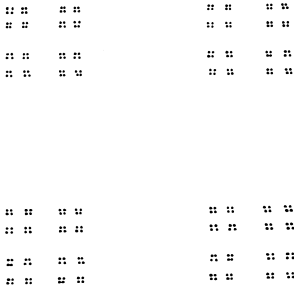
S'il est 10 fois plus petit :

$$d = \frac{\log 4}{\log 10} \approx 0,60106$$

S'il est 4 fois plus petit :

$$d = \frac{\log 4}{\log 4} = 1$$





**Figure A.11** Nuage de points : « poussière fractale » dans un plan.

À chaque étape, un point est remplacé par 4 points disposés en carré. Sur cette Figure, le rapport des côtés des carrés successifs est 3,5 donc  $d = \log 4 / \log 3,5 = 1,093$  : la « poussière » occupe le plan de façon un peu plus dense qu’une ligne continue.

Dans ce dernier cas, la « poussière » dispersée dans le plan a exactement la même dimension qu’une ligne continue (réalise le même « degré d’occupation » du plan qu’une ligne continue).

S’il est 2 fois plus petit, il se génère à chaque étape 4 points doubles, à savoir les milieux des côtés du carré précédent, et un point quadruple : le milieu du carré. On a dans ce cas :

$$d = \frac{\log 4}{\log 2} = 2$$

identique à la dimension du plan. Le plan n’est pas entièrement recouvert par la « poussière », car l’existence des points doubles est compensée par des régions du plan restant vides.

Si chaque nouveau carré a comme côté les 2/3 de celui du carré précédent (côté « 3/2 fois plus petit ») :

$$d = \frac{\log 4}{\log(3/2)} \approx 3,4190$$

dimension supérieure à celui du plan. Celui-ci est donc recouvert plusieurs fois.

**A.2.4 Codimension. Intersection et projections d’objets fractals**

La **codimension** est la dimension de l’espace euclidien dans lequel se développe l’objet fractal, diminuée de la dimension de ce dernier (dimension fractale + codimension = dimension de l’espace euclidien qui accueille l’objet).

Remarquons que la dimension fractale a été définie à partir des propriétés propres de l’objet fractal, dont son invariance d’échelle, indépendamment de l’espace euclidien dans lequel il se développe. Ainsi, la dimension fractale d’une arborescence définie par un initiateur et un générateur est la même, que les bifurcations aient lieu toujours dans le même plan (« arbre plat »), ou se distribuent dans l’espace à 3 dimension (« arbre en 3D »). La codimension, en revanche, est augmentée d’une unité dans le second cas.

En conséquence, la **projection** d’un objet fractal dans un sous-espace de celui dans lequel il s’est déployé (par exemple, la projection sur un plan d’un objet déployé dans 3 dimensions) ne change pas la dimension fractale (Fig. A.12.b).

Si l'objet déployé en 3D a une dimension fractale comprise entre 2 et 3, il en sera de même de la projection sur un plan, qui donc aura une dimension supérieure au plan (donc une infinité de points doubles : image d'un buisson dont l'ombre se projette sur un plan).

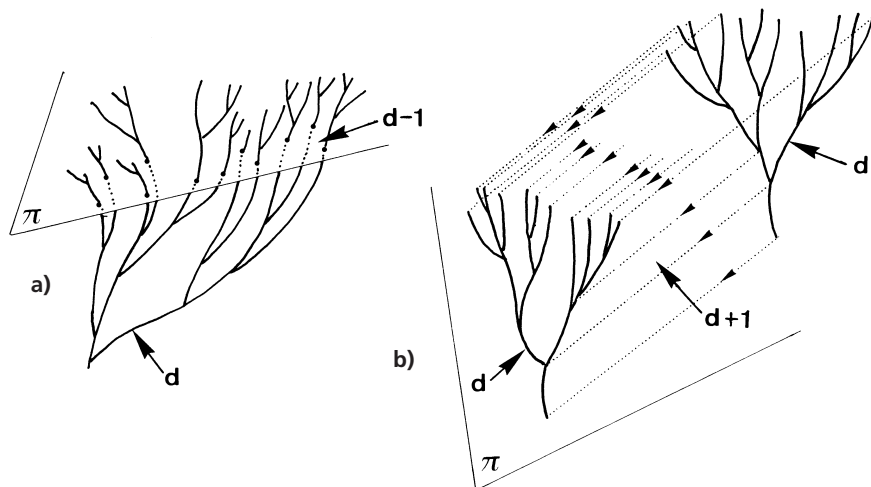
Enfin, on démontre que l'**intersection** de deux objets de dimensions  $d_1$  et  $d_2$ , déployés dans le même espace euclidien de dimension  $D$ , a la dimension fractale :

$$d_{\text{intersection}} = d_1 + d_2 - D$$

Par exemple, si dans l'espace 3D une arborescence de dimension fractale 1,5 est coupée par un plan (2D), l'intersection est une « poussière » dans le plan, de dimension fractale  $1,5 + 2 - 3 = 0,5$  (Fig. A.12.a).

La règle vaut aussi bien pour les objets euclidiens que pour les objets fractals. Si deux surfaces continues se coupent dans l'espace, leur intersection est de dimension  $2 + 2 - 3 = 1$  (c'est une ligne continue). Et si une surface rugueuse de dimension fractale  $d$  (comprise entre 2 et 3) coupe un plan ou une surface lisse, l'intersection est une ligne irrégulière de dimension  $d - 1$  (comprise entre 1 et 2).

Si, dans un espace 3D, un objet fractal est déplacé et balaie une aire (Fig. A.12.b, cas d'une projection sur un plan), ce balayage ajoute une dimension (de la même façon qu'en translatant une ligne de dimension 1, on obtient une surface de dimension 2). S'il s'agit d'une arborescence de dimension 1,5, l'aire balayée sera un nouvel objet fractal, de dimension 2,5. On vérifie que (la projection sur un plan étant l'intersection par ce plan de la surface balayée lors de l'opération) la dimension fractale du résultat est  $(d + 1) + 2 - 3 = d$ , comme signalé plus haut.



**Figure A.12** a) Intersection par un plan  $\pi$ . b) Projection sur un plan  $\pi$  d'un objet fractal déployé dans un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 3.

Si la dimension fractale de l'objet est  $d$ , celle de l'intersection est  $(d - 1)$  ; celle de la projection est  $d$  ; celle de la surface balayée par l'opération de projection est  $(d + 1)$ .

## A.3 FRACTALES STATISTIQUES. PROBLÈMES DE DÉTERMINATION DE LA DIMENSION FRACTALE

### A.3.1 Exemple de calcul : dimension fractale d'une « côte rocheuse »

Revenons à notre « côte de Bretagne » (§ A.2.2.a) – ou à tout autre objet concret d'aspect fractal. À l'image géométrique d'un objet fractal régulier pris comme modèle, on doit ajouter en chaque point une déviation aléatoire, un « bruit de fond », faisant qu'une partie de l'objet n'est plus rigoureusement le modèle réduit de l'ensemble mais en conserve seulement les caractères statistiques : même type de rugosité d'une échelle d'observation à l'autre pour un tracé de côte ; même « port » pour un arbre et ses branches (ce n'est pas toujours le cas !) ; même type de surdispersion (cf. § A.1.3 ; Fig. A.4) pour un nuage de points matériels observé à différentes échelles spatiales (ce qui est bien rarement réalisé, sauf sur un intervalle très restreint d'échelles d'observation).

La dimension fractale de l'ensemble a un caractère statistique, et se déterminera par un « arpentage » de l'objet, comme décrit plus haut (§ A.2.2.a). Pour déterminer la dimension fractale, on observera la vitesse à laquelle croît (en moyenne) la longueur enregistrée par l'opération, à mesure que diminue le pas d'arpentage<sup>1</sup>. Par exemple si, le long d'une ligne irrégulière, un grand pas est en moyenne remplacé par 20 pas 10 fois plus petits (Fig. A.13), la dimension fractale sera égale à :

$$d = \frac{\log 20}{\log 10} \# 1,30103$$

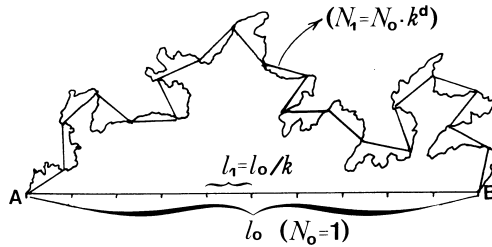
(ou :  $10^{1,30103} = 20$ ). Si cette ligne est le tracé d'un rivage, ce  $d$  mesure le degré d'interpénétration entre l'eau et le continent. Il faudra, pour recouvrir la ligne étudiée :

- 1 km à vol d'oiseau ;
- 20 pas de 100 m : on enregistre 2 km ;
- $2^2 = 400$  pas de 10 m = 4 km ;
- $2^3 = 8\ 000$  pas de 1 m = 8 km ;
- $2^4 = 160\ 000$  pas de 10 cm = 16 km ; etc.

On voit que la longueur enregistrée  $L$  s'accroît selon une progression géométrique, lorsque le pas d'arpentage  $l$  décroît selon une autre progression géométrique.

À une étape donnée, la longueur totale est trouvée en multipliant la longueur  $l$  du pas d'arpentage par le nombre de pas  $N$ . Après la première opération, on a  $L_0 = N_0 \cdot l_0$ . À une quelconque des étapes suivantes, on comptabilise  $K$  fois plus de

1. Plus formellement, cette dimension, appelée en mathématiques *dimension de Hausdorff*, est obtenue en recouvrant l'objet par des boules (ou des disques dans le plan) de diamètres décroissants. On admet que le « pas d'arpentage » est équivalent à un diamètre de boule ou de disque.



**Figure A.13** Arpentage d'une ligne fractale.

À chaque étape de l'arpentage, un pas de longueur  $l_i$  est remplacé par 20 pas de

longueur  $\frac{l_i}{10}$ . La dimension fractale est donc  $d = \frac{\log 20}{\log 10} \approx 1,3$ .

pas de longueur  $k$  fois plus petite ( $k = \frac{l_0}{l}$ ), avec  $d = \frac{\log K}{\log k}$  ou  $K = k^d = \left(\frac{l_0}{l}\right)^d$ .

La nouvelle longueur trouvée est :

$$L = N \cdot l = K \cdot N_0 \cdot l = N_0 \cdot \left(\frac{l_0}{l}\right)^d \cdot l = N_0 \cdot l_0^d \cdot l^{1-d}$$

ou :

$$\log L = C^{te} + (1-d) \cdot \log l$$

qui est l'équation d'une droite de pente  $(1-d)$  sur le graphique construit en portant  $(\log l)$  en abscisses et  $(\log L)$  en ordonnées.

Si l'on réitère la mesure avec plusieurs valeurs de  $l$ , on doit obtenir un alignement (approximatif, puisqu'il s'agit d'un objet statistique) de pente  $(1-d)$  (Fig. A.14a), ce qui permet de déterminer directement  $d$ .

L'utilisation de la dimension fractale peut servir à résoudre des problèmes concrets à une certaine échelle d'observation. Mais alors, ce n'est pas l'objet fractal dans sa description intégrale qui nous intéresse, mais une étape intermédiaire de sa construction ou, ce qui revient au même, de sa mesure par un arpentage de finesse adéquate. Le pas d'arpentage doit correspondre à l'échelle d'utilisation de l'objet.

Par exemple, un trait de côte peut être destiné soit à un aménagement portuaire, soit à l'installation de parcs ostréicoles. Supposons (i) que le rivage soit de dimension fractale 1,32 ; (ii) que port soit formé de bassins de 300 m de largeur (la côte est rectifiée sur cette largeur) ; (iii) que les parcs ostréicoles mesurent 50 m en front de mer. Problème : combien de bassins portuaires ou combien de parcs ostréicoles pourrait-on, au maximum, placer sur une portion de côte délimitée par deux points distants à vol d'oiseau de 1 318 m ?

La mesure fractale de la côte entre ces deux points est de  $(1\ 318)^{1,32} = 13\ 131$  « m<sup>1,32</sup> ». Mais la valeur de  $L$  en fonction de  $l$  est donnée par la droite du plan  $\{\log l ; \log L\}$  ( $L$  et  $l$  exprimées par exemple en mètres), de pente  $(1-d) = -0,32$  et passant par le point  $\{\log 1\ 318 ; \log 1\ 318\}$  (puisque  $L_0 = l_0$ ). Il suffit de tracer cette droite sur du papier millimétré (échelles graphiques arbitraires, la pente  $(1-d)$  étant la pente analytique et non la pente graphique : il vaut donc mieux adopter la même unité sur

les deux axes de coordonnées (par exemple 5 cm pour une unité de logarithme décimal) pour constater que :

– pour un pas d’arpentage  $l = 300$  m (largeur des bassins portuaires), la ligne brisée décrivant la côte à cette échelle vaut 2 018 m ; on peut donc installer au maximum 6 bassins de 300 m ;

– pour un pas d’arpentage  $l = 50$  m (largeur des enclos ostréicoles), elle vaut 3 631 m ; on peut donc installer au maximum 72 enclos de 50 m. Ce résultat correspond bien à l’intuition : les enclos utilisent des sinuosités que les bassins portuaires doivent lisser.

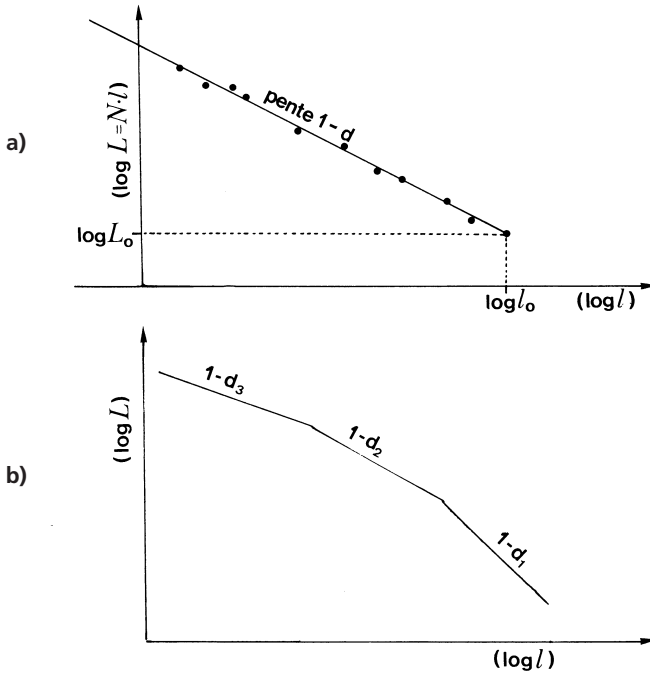


Figure A.14 Détermination de la dimension fractale d’une ligne fractale statistique au moyen de la corrélation observée (en log-log) entre la longueur mesurée  $L$  et le pas d’arpentage  $l$ .

a) Cas d’une seule dimension fractale. b) Cas où plusieurs dimensions fractales successives sont constatées, chacune s’appliquant à un intervalle d’échelles d’observations (§ A.4.3).

### A.3.2 Comment assigner une « mesure » à un objet fractal ?

Il faut d’abord connaître la dimension fractale  $d$  : on mesurera alors l’objet dans la dimension  $d$ . Par exemple, s’agissant d’une « côte rocheuse » de dimension 1,2 (ligne de longueur infinie et de surface nulle), sa mesure doit s’exprimer en «  $\text{km}^{1,2}$  », ou en «  $\text{m}^{1,2}$  », ou en «  $\text{mm}^{1,2}$  »<sup>1</sup>.

1. Mesurer une telle ligne en « kilomètres » ou en « mètres » (comme on le fait souvent en parlant des longueurs de côtes !) est aussi absurde que de mesurer la hauteur d’une montagne en mètres carrés, ou la surface d’un lac en mètres.

On peut établir comme suit un tableau des mesures présomptives faites selon des dimensions diverses. Seule la mesure dans la dimension propre de l'objet (qu'il soit fractal ou non) donne un résultat fini non nul (noté  $F$ ). Un résultat exprimé dans une dimension supérieure à celle de l'objet est nul ; dans une dimension inférieure, il est infini.

Nature de l'objet	Dimension de l'objet	Dimension de la mesure					
		0,5	1	1,5	2	2,5	3
Poussière fractale	0,5	$F$	0	0	0	0	0
Ligne lisse	1	$\infty$	$F$	0	0	0	0
Côte rocheuse, arbre	1,5	$\infty$	$\infty$	$F$	0	0	0
Surface lisse	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$F$	0	0
Éponge	2,5	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$F$	0
Volume	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$F$

La mesure exprimée dans la bonne dimension (l'unité de mesure étant quelconque) est indépendante du pas choisi. Ainsi, pour une ligne lisse, « 1 km » et « 1 000 m » désignent la même longueur. Pour une surface lisse, « 1 km<sup>2</sup> » et « 1000<sup>2</sup> = 1 000 000 m<sup>2</sup> » désignent la même aire. Pour une ligne rugueuse de dimension 1,3 (pente du graphique – 0,3), supposons que  $L_0 = l_0 = 1 \text{ km} = 1\,000 \text{ m}$  ; si on l'arpente avec des pas de 1 m, on en trouvera  $1000^{1,3} = 7\,943$  « m<sup>1,3</sup> ». Mais la mesure s'exprime indifféremment en « m<sup>1,3</sup> » ou en « km<sup>1,3</sup> » ; et  $1 \text{ « km}^{1,3} \text{ »} = 1000^{1,3} \text{ « m}^{1,3} \text{ »}$ .

### A.3.3 Autres exemples de mesures de la dimension fractale et paramètre supplémentaire

#### a) Surface rugueuse

Le problème de l'occupation d'une « surface » fractale par des éléments de surface de tailles diverses se traite comme le problème précédent, à la différence près qu'on n'arpente pas la surface par des segments de longueurs variables, mais qu'on la recouvre ou l'enveloppe par un pavage (*tiling*) fait d'éléments de surface d'aires plus ou moins grandes.

Supposons par exemple qu'on cherche à connaître, sur un récif corallien (objet d'une très grande rugosité à toutes les échelles d'observation – dimension fractale de l'ordre de 2,64<sup>1</sup> : Basillais, 1997) la surface disponible pour des organismes encroûtants de tailles variées : Bryozoaires de 1 mm de diamètre, Mollusques de 1 cm de diamètre, Bactéries de 1  $\mu\text{m}$ ...

1. L'intersection du récif corallien par un plan (transect-échantillon) est alors une ligne de dimension 1,64 (§ A.2.4).

Partons d'un pavage par des éléments de 1 cm<sup>2</sup> (simulant de petits Mollusques ou de petites Anémones de mer) et considérons un morceau de récif fournissant une surface disponible de 5 m<sup>2</sup> pour cette taille d'organismes. Combien de Bryozoaires de 1 mm<sup>2</sup> (= 10<sup>-2</sup> cm<sup>2</sup>) chacun pourront remplacer une Anémone de 1 cm<sup>2</sup> ? 100 (= 10<sup>2</sup>) si la surface support était lisse (de dimension 2). Si elle est fractale de dimension 2,64, en utilisant les anfractuosités sous-jacentes du centimètre carré observé, les Bryozoaires pourront être au nombre de 10<sup>2,64</sup> = 436,5 et recouvrir une surface de (436,5 · 10<sup>-2</sup>) = 4,365 cm<sup>2</sup>.

La surface *S*, mesurée par un pavage de l'objet fractal par des éléments de surface d'aires *s*, augmente quand *s* diminue. Si, à une certaine étape, on remplace chaque élément de surface *s* prise comme unité d'aire, par des éléments *k* fois plus petits en dimension linéaire, donc *k*<sup>2</sup> fois plus petits en aires, ces nouveaux éléments seront au nombre de *k*<sup>*d*</sup>, et occuperont une nouvelle surface égale à (*k*<sup>*d*</sup> · *k*<sup>-2</sup>) = *k*<sup>*d*-2</sup> unités d'aire : le logarithme de *S* est proportionnel à (*d*-2). L'équivalent de la droite de pente (1-*d*) de la Fig. A.14a est une droite de pente (2-*d*) – remarquons que *l* (longueur « *k* fois plus petite » à chaque étape) diminue de la droite vers la gauche sur l'axe des abscisses, cependant que *k* augmente, ce qui inverse la pente de la droite.

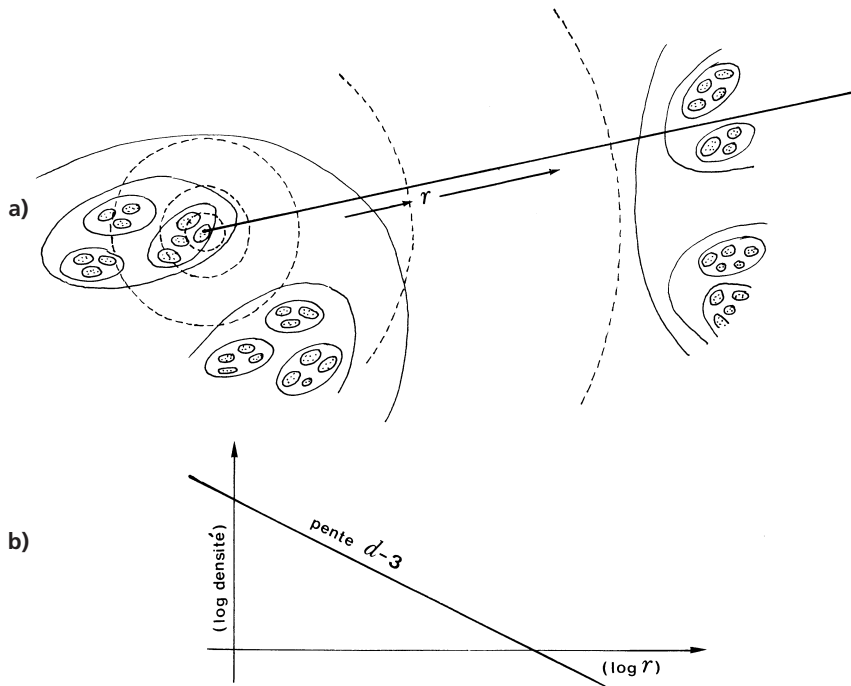
En appliquant la même méthode, et en partant d'une surface de 5 m<sup>2</sup> du récif rugueux occupée par des cm<sup>2</sup>, on calcule les autres surfaces utiles de ce substrat, pour les autres tailles d'organismes, donnant le tableau :

Taille linéaire moyenne et nature des organismes fixés	Surface utile de substrat corallien sous 1 m <sup>2</sup>
1 dm (grands Mollusques)	1,15 m <sup>2</sup>
1 cm (petits Mollusques, Anémones)	5,00 m <sup>2</sup>
1 mm (grands Bryozoaires)	21,8 m <sup>2</sup>
0,1 mm (petits Bryozoaires)	95,3 m <sup>2</sup>
0,01 mm (spores)	416 m <sup>2</sup>
1 μm (Bactéries)	1 815 m <sup>2</sup>

**b) Poussière fractale dispersée dans un espace 2D ou 3D**

La surdispersion (*patchiness*) a été décrite dans ce qui précède. Pour mesurer sa dimension fractale, on peut partir d'un point arbitraire de la « poussière » et observer le nombre de points se trouvant à des distances croissantes de ce point. En augmentant la distance, on augmente l'importance relative des zones vides de points. Le procédé s'applique aussi bien au cas où la hiérarchie est discrète (groupes successifs de points clairement emboîtés : Fig. A.15.a), qu'à celui où la cascade est floue (on ne discerne pas d'échelles préférentielles).

Si *d* est la dimension fractale du nuage de points à structure emboîtée (Fig. A.15.a), le nombre de points dans une sphère ayant comme centre le point de départ et de rayon *r*, est proportionnel à *r*<sup>*d*</sup>. Le volume de la sphère est proportionnel à *r*<sup>3</sup>. La densité de points par unité de volume est donc proportionnelle à *r*<sup>*d*-3</sup>. En portant sur un graphique log *r* en abscisses, et le log de la densité moyenne en ordonnées, on obtient une droite de pente (*d* - 3) dont on déduit *d* (Fig. A.15.b).



**Figure A.15** Détermination de la dimension fractale d'un nuage de points à structure hiérarchisée (poussière fractale) dans un espace euclidien 3D

Par estimation de la pente de la droite (b) reliant (en métrique log-log) la densité moyenne à l'intérieur de sphères de rayons  $r$  croissants, à la mesure de ces rayons. Les contours fermés dans (a) délimitent (à main levée), des groupes emboîtés de points. Chacun de ces points représente lui-même, théoriquement, un groupe de points (indiscernables à l'échelle de la figure), pourvu de la même géométrie hiérarchique.

### c) Retour sur les arborescences

Pour caractériser un arbre fractal irrégulier (fractale statistique) on utilisera, comme il a été dit plus haut (§ A.1.3), la courbe des fréquences rétrocumulées de la variable « longueur des branches » – la longueur d'une branche étant comptée de façon rectiligne depuis son départ de la branche précédente jusqu'à l'extrémité de ses dernières ramifications.

Partons d'une fractale régulière de dimension  $d$ . Dans le processus générateur, chaque branche donne naissance à  $K$  branches  $k$  fois plus courtes, avec  $K = k^d$ . On ne peut pas procéder exactement comme dans l'exemple précédent car, en réunissant les branches émises à un certain stade du processus générateur (et dont la longueur cumulée vaut  $K_n \cdot l_n$ ), on abandonne le « tronc » qui les unit par leurs bases. À chaque étape, la longueur de ce tronc commun échappe à la statistique. Mathématiquement parlant, il y a **autoaffinité** et non autosimilarité.



Le nombre de branches générées à l'étape  $n$  (comptée à partir de  $N_0$  « troncs » préalables) est  $N_n = N_0 \cdot K^n = N_0 \cdot k^{dn}$ , la longueur de chaque branche étant

$l_n = \frac{l_0}{k^n}$ . On en déduit :

$$N_n = N_0 \cdot \left(\frac{l_0}{l_n}\right)^d = (N_0 \cdot l_0^d) \cdot l_n^{-d}$$

d'où

$$\log N_n = C^{te} - d \cdot \log l_n$$

équation d'une droite de pente  $-d$  en métrique log-log.

Pour calculer une fréquence rétrocumulée, on totalisera le nombre de branches de longueur supérieure à  $l_n$ , soit (en posant  $N_0 = 1$  pour simplifier) :

$$\sum N_n = K^0 + K^1 + K^2 + \dots + K^n = \frac{K^{n+1} - 1}{K - 1}$$

La différence, sur le graphique log-log, entre les ordonnées correspondant à  $N$  et à  $\sum N$ , à une étape donnée  $n$  est :

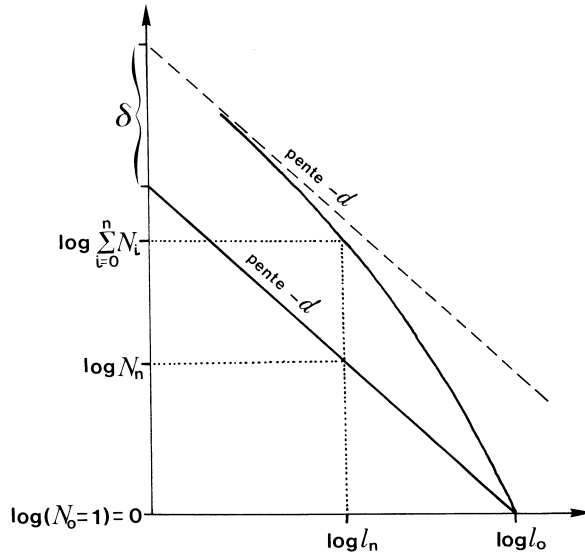
$$\begin{aligned} \delta &= \log \sum N - \log N = \log \frac{\sum N}{N} \\ &= \log \frac{K^{n+1} - 1}{(K - 1) \cdot K^n} = \log \left[ \frac{1}{K - 1} \cdot \left( K - \frac{1}{K^n} \right) \right] \end{aligned}$$

La dernière expression tend visiblement, quand  $n \rightarrow \infty$ , vers  $\log\left(\frac{K}{K-1}\right)$ , quantité positive puisque  $K > 1$ . En conclusion :

- (i) Le nombre de branches (à savoir  $N = K^n$ ) croît sur le graphique log-log, quand  $l$  diminue, selon une droite de pente  $-d$  ;
- (ii) le nombre cumulé de branches d'une longueur totale supérieure ou égale à une valeur  $l$  croît, quand  $l$  diminue, selon une courbe située au-dessus de la droite précédente, décalée verticalement d'une quantité  $\delta$  tendant, lorsque  $l \rightarrow 0$ , vers la quantité constante  $\log\left(\frac{K}{K-1}\right)$ , autrement dit vers une asymptote de même pente ( $-d$ ) que la droite précédente (Fig. A.16).

Sur les objets concrets (arbres réels), lorsque l'arborescence est irrégulière mais obéit à une règle statistique unique, on construira un graphique log-log représentant la courbe des fréquences rétrocumulées des longueurs des branches sur l'ensemble de l'arbre (depuis la hauteur de l'arbre entier, jusqu'à la longueur du plus petit rameau). Si la courbe obtenue montre une asymptote, celle-ci est de pente ( $-d$ ).

De quoi dépend le décalage entre les deux droites ? Pour le comprendre, reprenons la règle de génération d'une arborescence fractale (supposée régulière). La règle « trois éléments deux fois plus petits » à chaque étape (dont on déduit  $d = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,585$ ) implique, toutes les deux étapes, « neuf éléments quatre fois plus petits ». Mais supposons qu'une étape sur deux soit sautée, c'est-à-dire que l'on ait la règle « neuf éléments



**Figure A.16** Caractérisation statistique d'une arborescente fractale.

La droite de pente  $(-d)$  représente la variation du nombre de branches en fonction de leurs longueurs. La courbe asymptote à une deuxième droite de pente  $(-d)$  (droite en tireté) est la courbe de fréquences rétrocumulées de la variable « longueur des branches ». Le décalage vertical entre la première droite et l'asymptote de la courbe est le paramètre  $\delta$  de cette théorie.

quatre fois plus petits » à chaque nouvelle étape. La dimension fractale est la même, puisque  $\frac{\log 3}{\log 2} = \frac{\log 9}{\log 4}$ . Cependant l'arbre n'a pas du tout le même port (Fig. A.17).

Les nombres cumulés de branches ne sont pas les mêmes :

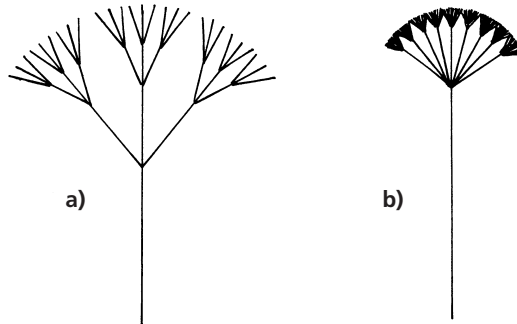
Étape	Premier cas		Deuxième cas	
	N	$\Sigma N$	N	$\Sigma N$
0	1	1	1	1
1	3	4	0	1
2	9	13	9	10
3	27	40	0	10
4	81	121	81	91
5	243	364	0	91
6	729	1 093	729	820

Le décalage vertical entre la première droite et l'asymptote de la courbe est égal à :

$$\begin{aligned} \delta &= \log \frac{K}{K-1} = \log \frac{3}{2} = 0,1761 \text{ dans le premier cas ;} \\ &= \log \frac{9}{8} = 0,0512 \text{ dans le second cas.} \end{aligned}$$

Le « port » de l'arbre dépend ainsi de deux paramètres :  $d$  (dimension fractale) et  $\delta$  (décalage vertical de l'asymptote). Le second paramètre pourrait être appelé un **paramètre de hiérarchie** car il évoque le degré de ramification dans l'organisation des niveaux successifs. Lorsque  $\delta$  est faible, une branche donne naissance tardivement à de nombreuses sous-branches très petites, qui se ramifieront ensuite de même. Lorsque  $\delta$  est élevé, chaque branche donne rapidement naissance à un nombre modéré de sous-branches d'assez grande taille, qui se ramifieront ensuite de même.

Ce nouveau paramètre dépend donc de la fréquence des bifurcations lors de la croissance de l'arbre. La transposition à la description d'une structure ou d'une organisation (un « organigramme ») est aisée. Nous la transposerons également, au § A.5 ci-après, à l'analyse de la diversité taxinomique.



**Figure A.17** Allures de deux arborescences régulières de même dimension fractale  $d$ , et différant par le « paramètre de hiérarchie »  $\delta$ . Chaque étape génère  $K$  branches  $k$  fois plus courtes, avec  $K = k^d$ . D'autre part  $\delta = \log \frac{k}{K-1}$ .

A :  $K = 3 ; k = 2 ; d = 1,585 ; \delta = 0,1761$ . B :  $K = 9 ; k = 4 ; d = 1,585 ; \delta = 0,0512$ .

## A.4 GÉOMÉTRIE DES ÉCOSYSTÈMES : OCCUPATION FRACTALE DE L'ESPACE-TEMPS

### A.4.1 Fonctionnalité de cette géométrie

La modélisation des écosystèmes n'a pas encore, tant s'en faut, intégré la notion de géométrie fractale. Il faudrait au moins, avant qu'une telle étape soit envisagée, qu'aient été construits des modèles de systèmes écologiques intégrant l'espace – or les tentatives en sont encore timides (cf. § 6.6.4.d). Une des raisons en est la difficulté de manipuler les équations aux dérivées partielles qui doivent alors être introduites, et de définir formellement des champs de vecteurs ou de tenseurs en biologie/écologie. À notre connaissance, les seules tentatives fructueuses ont été, jusqu'ici, des modélisations de la diffusion des organismes planctoniques en milieu aquatique – problématique pratiquement physique, alliant les caractéristiques de la diffusion physique et celles de la multiplication des particules vivantes (« modèles KISS », ainsi appelés pour rappeler les noms de leurs initiateurs : Kierstead, Slobodkin et Skellam).

Néanmoins, le caractère essentiel des écosystèmes d'être structurés (hiérarchiquement) dans l'espace-temps est bien établi : voir § 0.4.1 et Margalef (1979, 1980). L'évidence d'une occupation fractale de l'espace par une biomasse diversifiée et par l'environnement physique lui-même, et son importance fonctionnelle (évoquée à de plusieurs reprises dans ce livre : voir par exemple §§ 1.4.4.a et b, 1.4.5, 3.5.3, 3.5.4, 4.1.2.a, 6.2.3.b, 6.2.4, 8.2.2.a, 10.4.1) suscite une vision nouvelle, et incite à sa modélisation.

Un écosystème naît d'interactions au contact entre une biomasse à propriétés diversifiées, et un milieu physique lui-même complexe. La surface d'échange entre biomasse et milieu est maximisée à la fois par la géométrie de la première (§ A.1 ci-dessus) et par celle du milieu : fractionnement des matériaux durs, turbulence des milieux fluides... La physique du fractionnement de la matière et celle des propriétés qui en découlent (physique, par exemple, de la percolation dans un matériau poreux), qui conditionnent largement la biologie, font aujourd'hui largement appel aux fractales. La modélisation future des écosystèmes s'y appuiera aussi sans aucun doute.

Par ailleurs, les écosystèmes interagissent entre eux par l'intermédiaire de leurs interfaces spatiales, donnant des « systèmes de systèmes » – autre aspect de l'organisation hiérarchique générale. Nous en avons donné des exemples à propos de l'exploitation d'un écosystème par un autre (§ 9.2.2 du livre). Quand une intensification des productions primaire et secondaire a lieu au voisinage d'un contact forêt-savane, ou eau-continent, ou à l'interface entre une eau marine froide riche en sels nutritifs et une eau chaude pauvre, l'augmentation de la « surface » de contact ou du « volume » d'interpénétration (en fait, de la **fractale de contact**) dynamise l'ensemble du système écologique.

## A.4.2 Exemples

Des recherches abordent depuis quelques années l'**écologie des paysages** (ex. Burrough, 1981 et suiv. ; Milne, 1987 et suiv. ; Turner & Gardner edit., 1991). La « rugosité » d'un paysage à différentes échelles d'observation a été décrite en termes de dimension fractale, considérée comme une de ses importantes caractéristiques (Milne, 1991). De nombreuses conséquences en découlent, applicables à des stratégies d'échantillonnage comme à la compréhension de l'écologie avec ses multiples échelles emboîtées.

Si, dans un certain intervalle d'échelles spatiales, la « surface » d'un substrat possède une dimension fractale, il faudra en tenir compte dans l'estimation de la biomasse qu'elle peut supporter. Si un substrat rocheux est de dimension 2,2 (transects linéaires de dimension 1,2), et si la biomasse encroûtant ces rochers est échantillonnée au moyen de cadres de  $1 \text{ m}^2$ , le résultat devra être rapporté non au  $\text{m}^2$  de substrat, mais au  $\text{m}^{2.2}$ . Si la zone étudiée est de  $1 \text{ km}^2$  (surface projetée sur une carte) la biomasse totale qu'elle supporte s'obtiendra en multipliant la biomasse moyenne observée sur des cadres de  $1 \text{ m}^2$ , non pas par  $(1\ 000)^2 = 1\ 000\ 000$ , mais par  $(1.000)^{2.2} \approx 4\ 000\ 000$ , afin de tenir compte de toute la rugosité d'échelle supérieure au  $\text{m}^2$  observé.

Une partie de la biomasse, elle-même de géométrie fractale, peut servir de substrat à une autre. Par exemple, un grand nombre d'espèces d'Insectes vit dans les espaces ménagés entre les branches, rameaux et feuilles d'une végétation. Ces espèces disposent d'un volume vital variable en fonction de leurs tailles individuelles. Lawton (1986) a pu mettre en évidence une relation entre les caractéristiques fractales de la végétation et la distribution de tailles du peuplement entomologique. De même, dans un milieu récifal, le volume dont disposent les espèces associées dépend des tailles individuelles (*cf.* calcul au § A.3.3.a). La distribution des tailles étant elle-même fractale (« granulométrie de la biomasse »), nous avons ici des exemples d'interactions entre objets fractals, en cohérence avec leurs géométries respectives. Rappelons aussi, à ce titre, l'interaction géométrique entre la trajectoire d'un prédateur (mouvement brownien fractionnaire ?) et la *patchiness* de la répartition de ses proies (§§ 6.2.3.b et 6.2.4 du livre).

### A.4.3 Hiérarchies et échelles d'observation

L'analyse d'une morphologie (celle d'une biomasse comme celle d'un substrat ou d'un paysage) met fréquemment en évidence des échelles d'observations particulières au niveau desquelles la dimension fractale change rapidement, voire brusquement.

Un objet fractal réel, nous l'avons signalé (§ A.1.3), ne possède une dimension fractale unique que dans un intervalle fini d'échelles d'observation. Une arborescence ne garde ses caractères qu'entre la taille de l'arbre et la taille de ses plus petits rameaux ; en dehors de ces limites, elle est remplacée par d'autres géométries fractales : celle du parenchyme foliaire ou celle de la forêt. Qui plus est, même au long de l'arborescence, la fractalité peut changer parce que la règle de ramification se modifie au cours du développement. Ces changements de dimension fractale se révèlent, sur les graphiques en log-log servant à déterminer  $d$ , par des ruptures de pentes des droites (Fig. A.14b).

De telles discontinuités ont une signification fonctionnelle. Écologiquement, elles reviennent à constater que l'interaction entre la biomasse et le biotope est de même nature dans un intervalle d'observation, mais qu'en dehors de ses limites, les contraintes exercées par le milieu sur la biomasse, et la réponse de cette dernière, changent de nature.

Par exemple, la poursuite indéfinie d'un processus de ramification végétale aboutirait, vers les petites tailles, à un feutrage empêchant toute circulation de gaz au contact de la biomasse – résultat opposé à ce que « recherche » la géométrie des branches. Le relais est alors pris par le tissu vacuolaire des feuilles. Du côté des grandes tailles, des contraintes écophysiologicals (montée de la sève etc.) assignent à un arbre individuel une taille verticale maximale ; le relais est pris par la forêt, fractale d'interpénétration entre l'atmosphère, le sol et la biomasse végétale, conditionnant le fonctionnement de l'écosystème forestier.

Bradbury *et al.* (1983, 1984) étudiant la géométrie des récifs coralliens à des échelles intermédiaires entre celle de la carte géographique et celle des colonies de Madrépores, trouve que la dimension fractale des contours est de l'ordre de 1,1 s'ils sont mesurés par des pas d'arpentage de 10 cm ; de 1,00 entre 20 cm et 2 m ; de 1,15

au-delà de 2 m. À l'échelle de la carte géographique, la dimension du rivage est de l'ordre de 1,2 (comme pour les côtes rocheuses typiques). Basillais (1997) trouve une dimension de transect de 1,64 à l'échelle des organismes encroûtants vivant dans les anfractuosités de ces récifs. Les transitions sont rapides. On en déduit que les facteurs contrôlant la morphologie récifale ne sont pas les mêmes sur les diverses plages d'échelles : les phénomènes physiques dominants et les contraintes exercées aboutissent à des « rugosités » différentes.

Rencontrées dans les écosystèmes, ces ruptures d'échelles révèlent l'existence d'un ensemble de géométries emboîtées, et prouvent l'existence d'une **hiérarchie des fonctionnements**<sup>1</sup>.

On peut en effet penser que lorsque la dimension fractale varie brusquement, on passe objectivement (et non par l'artifice de l'observation) d'une échelle et donc d'une nature de phénomènes, à une autre. En d'autres termes, tant que la dimension fractale d'un objet ne change pas lorsqu'on l'observe à plusieurs échelles d'observations, les processus déterminants ne changent pas. Quand la dimension fractale change, on est en présence d'autres phénomènes et l'on doit passer à une « autre écologie ». Au concept de « temps caractéristique » il faut donc ajouter celui d'« espace caractéristique » – les deux étant liés par les vitesses de propagation des effets.

## A.5 LA DIVERSITÉ BIOLOGIQUE COMME PROPRIÉTÉ FRACTALE DE LA BIOMASSE. DISTRIBUTIONS DE ZIPF/PARETO/MANDELBROT

### A.5.1 Forme de la distribution et premières interprétations

Nous avons introduit au § 7.2.3 du livre la description de la diversité spécifique au moyen de **diagrammes rangs-fréquences**, assimilables à des courbes de fréquences rétrocumulées (§ 7.2.3.a). Nous avons évoqué notamment le modèle de Zipf-Pareto-Mandelbrot, appliqué initialement à des systèmes socio-économiques et linguistiques (*cf.* § 7.2.3 : quatrième modèle cité, et Annexe 7.1 : § 3), et commodes aussi pour représenter la répartition des individus d'une communauté (ou d'un échantillon) en espèces distinctes – modèle exprimé par l'équation :

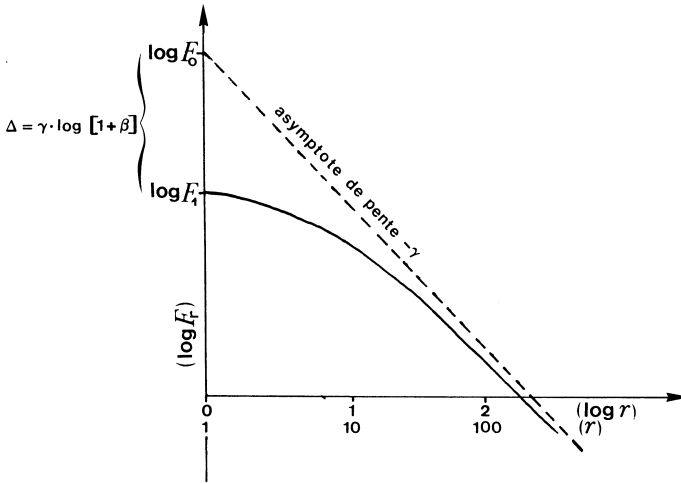
$$F_r = F_0 \cdot (r + \beta)^{-\gamma}$$

ou 
$$\log F_r = \log F_0 - \gamma \cdot \log(r + \beta)$$

où  $F_r$  est la fréquence relative (au sens de proportion du nombre d'individus, ou de proportion en biomasse, selon la définition adoptée de la diversité spécifique) de l'espèce de rang  $r$  dans un classement par fréquences décroissantes.

1. On considère, dans la théorie usuelle de la hiérarchie, que les emboîtements de phénomènes sont largement dus à des **temps caractéristiques** différents : les processus caractéristiques d'un niveau d'organisation « inférieur » sont plus rapides que ceux du niveau « supérieur », et ces derniers intègrent les premiers sur de longs intervalles de temps. Mais cette règle a des exceptions.

Sur un diagramme en log-log, les points représentatifs des espèces successives du classement sont répartis le long d'une courbe décroissante, montrant une asymptote de pente  $(-\gamma)$  et d'ordonnée à l'origine  $\log F_0$  (Fig. A.18).



**Figure A.18** Distribution de Pareto représentée par un « diagramme rangs-fréquences » (courbe de fréquences rétrocumulées).  
(Interprétation : voir Annexe 7.1 du livre, § 3.2.)

$\beta$  et  $\gamma$  sont des paramètres du modèle ;  $F_0$  n'est pas un paramètre libre, car il doit obéir à la contrainte  $\sum_r F_r = 1$ , ou  $\sum_r F_r = N$  (= nombre d'individus de la collection) s'il s'agit des fréquences absolues des espèces. Le décalage à l'origine des abscisses entre la courbe et son asymptote est :

$$\Delta = \log F_0 - \log F_1 = \log \frac{F_0}{F_1} = \gamma \cdot \log(1 + \beta)$$

Deux interprétations de cette loi (citées au § 7.2.3.c) ont été proposées par Mandelbrot dans le contexte de la théorie générale des communications – mais nous pouvons aisément les transposer à la théorie des écosystèmes, en admettant respectivement :

- soit l'existence d'un « coût » de chaque espèce dans un écosystème ;
- soit un contexte évolutif tel que les espèces d'une succession ont une certaine probabilité d'apparaître dès que certaines conditions préalables (physico-chimiques ou biologiques – et parmi ces dernières, l'apparition préalable d'autres espèces de la succession) se trouvent réalisées.

Ces deux interprétations, avons-nous remarqué, ne sont pas contradictoires, dans la mesure où le coût d'une espèce peut être identifié au temps nécessaire d'évolution de l'écosystème pour qu'elle puisse apparaître.

Nous pouvons montrer maintenant de manière plus formelle qu'une loi de Pareto est obtenue comme conséquence d'une arborescence d'apparitions d'espèces de plus en plus rares et de plus en plus exigeantes, de plus en plus dépendantes de la présence d'espèces préalables.

### A.5.2 Interprétation dans le contexte d'une succession écologique

Sans même se référer explicitement à une évolution de l'écosystème (Chapitre 9 du livre), la régularité globale pourrait s'exprimer comme suit : dans une suite d'espèces classées par abondances décroissantes, une espèce est en moyenne suivie par  $K$  autres espèces environ  $k$  fois plus rares, avec  $K = k^d$ . On reconnaît clairement ici une régularité fractale.

Imaginons, pour fixer les idées, que le processus comporte des étapes successives discrètes notées  $i = 1, 2, 3, \dots$ , chacune correspondant à l'apparition de  $K$  fois plus d'espèces  $k$  fois plus rares. On peut dresser un tableau où  $N_i$  désigne le nombre d'espèces nouvelles à l'étape  $i$  de l'arborescence,  $F_i$  désigne leur fréquence (relative) moyenne sur l'étape  $i$ , et  $A$  désigne une quantité de départ arbitraire :

$i$	$N_i$	$F_i$
		$A$
1	1	$A \cdot k^{-1}$
2	$K$	$A \cdot k^{-2}$
3	$K^2$	$A \cdot k^{-3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$i$	$K^{i-1}$	$A \cdot k^{-i}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Rappelons que, par construction, un rang  $r$  est égal au nombre d'espèces de fréquences inférieures ou égales à  $F_r$ . S'il y a des espèces *ex aequo*, on devra leur assigner le rang maximum (et non le rang minimum, comme lorsqu'on classe des élèves !). On aura donc :

$$\begin{aligned} r_i &= N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_i \\ &= 1 + K + K^2 + \dots + K^{i-1} \\ &= \frac{K^i - 1}{K - 1} \end{aligned}$$

D'autre part  $F_i = A \cdot k^{-i}$ . D'où  $k^i = \frac{A}{F_i}$ . En posant  $\beta = \frac{1}{K-1}$  et  $\gamma = \frac{1}{d}$ , il vient :

$$\begin{aligned} r_i &= \beta \cdot K^i - \beta \\ r_i + \beta &= \beta \cdot K^i = \beta \cdot k^{d \cdot i} = \beta \cdot \left[ \frac{A}{F_i} \right]^d \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (r_i + \beta)^{1/d} &= \beta^{1/d} \cdot A \cdot F_i^{-1} \\ (r_i + \beta)^\gamma &= \beta^\gamma \cdot A \cdot F_i^{-1} \\ F_i &= \beta^\gamma \cdot A \cdot (r_i + \beta)^{-\gamma} \end{aligned}$$

Or pour un rang  $r_i$ , affecté comme nous l'avons dit, à toutes les espèces *ex aequo* apparues à l'étape  $i$ , la fréquence de l'espèce est celle caractérisant l'étape :  $F_r = F_i$ . En posant  $A = F_0 \cdot \beta^{-\gamma}$  il vient :  $F_i = F_0 \cdot (r + \beta)^{-\gamma}$ . On retrouve exactement la loi de Pareto.

Nous avons signalé plus haut que, dans le tracé en log-log de la courbe de fréquences rétrocumulées relative à une arborescence paramétrée par  $K = k^d$ , le décalage vertical à l'origine entre la courbe et son asymptote était égal à  $\delta = \log \frac{K}{K-1}$ .

Cependant, pour comparer les deux graphes, il est nécessaire de permuter les deux axes de coordonnées, puisque l'homologue de la fréquence cumulée est la quantité  $\frac{r}{S}$ ,  $S$  étant le nombre d'espèces recensées (cf. § 7.2.3.a du livre). On écrit dès lors

$$\frac{\delta}{\Delta} = d = \frac{1}{\gamma} \quad (\text{Fig. A.19}). \quad \text{Comme } \Delta = \gamma \cdot \log(1 + \beta), \text{ on retrouve bien la relation}$$

$$\beta = \frac{1}{K-1}, \text{ pouvant également s'écrire } K = 1 + \frac{1}{\beta}.$$

Rappelons que  $\delta$  avait été interprété, dans la géométrie de l'arbre fractal, comme un « paramètre de hiérarchie » : plus  $\delta$  est élevé, plus les bifurcations sont rapprochées et peu nombreuses à chaque étape, pour une dimension fractale  $d (= \frac{1}{\gamma})$  donnée.

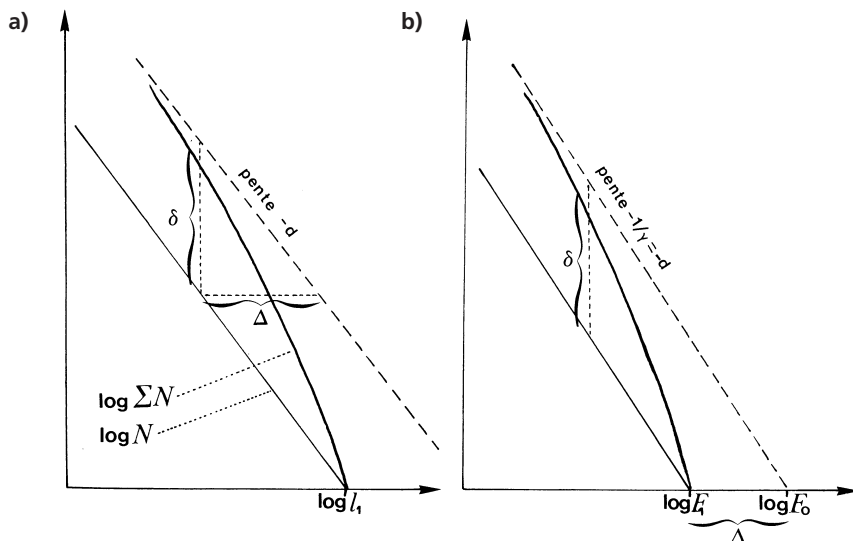
En conclusion la distribution de Pareto, lorsqu'elle est constatée sur une suite d'espèces, exprimerait que cette suite est générée par des étapes à chacune desquelles, apparaissent « en moyenne »  $K \left[ = 1 + \frac{1}{\beta} \right]$  espèces nouvelles, chacune

« en moyenne »  $k \left[ = \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right)^\gamma \right]$  fois plus rares que l'espèce apparue précédemment, puisque  $K = k^d = k^{1/\gamma}$ .

Ainsi, dans une collection d'espèces, on peut par exemple avoir  $\gamma = 2$  et  $\beta = 3$ , d'où  $K = 4/3 = 1,333$  et  $k = (4/3)^2 = 1,778$ , ce qui signifiera qu'à chaque étape de l'organisation de la diversité spécifique, il y a « en moyenne » 1,333 fois plus d'espèces 1,779 fois moins abondantes. C'est la situation d'un ensemble de Cantor (§ A.2.3.d ci-dessus).

Il faut toutefois rappeler que les lois de Pareto ne sont pas toujours vérifiées, tant s'en faut. Le plus souvent on observe (§§ 7.2.3 et 9.1 du livre) des déviations par rapport à ce modèle central (ou « neutre » au sens de la théorie des tests), dans le sens soit d'une plus grande concavité des courbes, soit d'une plus grande convexité, en fonction de l'état d'évolution et/ou de perturbation de l'écosystème. Ces dévia-

tions seraient peut-être à décrire comme des modifications de la dimension fractale, ou de tout autre paramètre de la distribution des abondances d'espèces (paramètre dont la signification écologique précise restera à découvrir).



**Figure A.19** Comparaison entre (A) une courbe de fréquences rétrocumulée décrivant une arborescence fractale, et (B) un « diagramme rangs-fréquences » (distribution de Pareto) – après permutation des axes de coordonnées sur ce dernier, par rapport à la présentation antérieure (cf. Fig. 7.19).

### A.5.3 Choix de la métrique décrivant les abondances d'espèces

Dernier point, concernant cette fois le choix de la variable décrivant l'abondance des organismes dans la paramétrisation de la diversité. Nous avons signalé, tant à propos des indices de diversité que des diagrammes rangs-fréquences, que ces descripteurs pouvaient être établis soit à partir des nombres d'individus de chaque espèce, soit à partir de leurs biomasses.

Mais on pourrait penser à d'autres métriques. Dans les interactions, on peut penser que certaines espèces interviennent de façon dominante par leurs surfaces (surfaces foliaires des arbres, ou surfaces de sol occupées par des végétations, ou encore surfaces de rocher occupées par diverses espèces encroûtantes). Dans une situation intermédiaire, les abondances à considérer sont peut-être proportionnelles à une mesure fractale des organismes.

Par exemple, si  $B$  est la biomasse d'une certaine espèce au sein d'une collection d'individus, et  $N$  le nombre d'individus (quand ils sont discernables : il y a problème quand les organismes coloniaux ou coalescents), la biomasse individuelle moyenne et le volume individuel moyen sont proportionnels à  $B/N$ . La surface individuelle moyenne est proportionnelle à  $(B/N)^{2/3}$ , et la longueur individuelle moyenne proportionnelle à  $(B/N)^{1/3}$ . Plus généralement, une mesure fractale individuelle est propor-

tionnelle à  $(B/N)^{k/3}$  – avec des biais statistiques entre les diverses mesures<sup>1</sup>. À ces biais près, la mesure totale de l'abondance de l'espèce dans la collection, où elle est représentée par  $N$  individus, est proportionnelle à  $\left[ N \cdot \left( \frac{B}{N} \right)^{k/3} \right] = B^{k/3} \cdot N^{(k-3)/3}$ .

Pour  $k = 0$  on retrouve le nombre d'individus  $N$ , et pour  $k = 3$ , la biomasse  $B$ . Des valeurs de  $k$  intermédiaires fournissent des métriques qui pourraient renseigner sur la géométrie la plus fonctionnelle (ou la granulométrie fonctionnelle etc.) des interactions entre espèces. Des travaux ont été entrepris en ce sens et sont en cours.

1. Rigoureusement parlant, le terme « moyenne » est inapproprié. En effet, les relations entre les diverses métriques possibles sont non-linéaires de sorte que, par exemple, le cube de la longueur moyenne n'est pas proportionnel au volume moyen. Pour de comparaisons rigoureuses, la moyenne doit être remplacée par la **médiane** (voir Frontier *et al.*, 2001 : §§ 2.1.2 et 8.2.2 a), et les tests statistiques sont non-paramétriques.