

Annexe B

Dynamique chaotique

B.1 VOCABULAIRE : ATTRACTEURS D'UNE DYNAMIQUE, BASSINS D'ATTRACTION

Lorsque plusieurs quantités varient simultanément dans un système, on représente l'évolution de ce dernier dans un espace euclidien ayant autant de dimensions que de variables X_i et de vitesses de variation notées X_i' ou $\dot{X} = \frac{dX}{dt}$ (donc deux dimensions par variable indépendante) – appelé l'**espace de phases**.

À chaque instant, l'état du système est défini sans ambiguïté par un point de l'espace de phases, et la cinétique du système est décrite par une **trajectoire**, courbe de l'espace de phases (continue dans les cas courants) parcourue dans un certain sens : celui du temps (indiqué par une flèche sur la courbe : Fig. B.1). Cette représentation a été utilisée dans les systèmes à deux ou trois variables de la dynamique des populations (§ 6.6 du livre), en n'utilisant que les X_i et non les X_i' (dans ce cas l'espace de phases est plutôt appelé **espace d'états**).

Lorsque le système évolue vers un état final d'équilibre, représenté par un point particulier de l'espace de phases, la trajectoire s'enroule autour de ce point. Le point d'équilibre étant le même pour toutes les trajectoires issues de points de départ non trop éloignés, ce point constitue un **attracteur**. Il peut cependant y avoir plusieurs attracteurs, et l'ensemble des points de départ aboutissant à chaque attracteur constitue son **bassin d'attraction**.

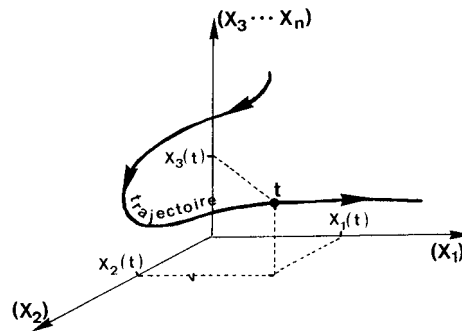


Figure B.1 Une trajectoire dans un espace d'états.

Les dérivées des variables par rapport au temps ne sont pas représentées, comme elles doivent l'être dans l'espace de phases.

Les trajectoires peuvent d'autre part s'enrouler autour d'autre chose qu'un point, par exemple une courbe ou une surface fermées (cercle ou ellipse dans les cas à deux variables les plus simples ; tore ou hyper-tore s'il y a plus de deux variables). On a alors un **attracteur cyclique**, ce qui signifie que, quel que soit le point de départ situé dans le bassin d'attraction, la trajectoire finit par rejoindre une figure fermée, dite **cycle limite**, parcourue indéfiniment lorsqu'elle est atteinte. Les coordonnées alors sont périodiques, revenant indéfiniment sur les mêmes valeurs (si le point de départ est intérieur à l'attracteur cyclique, alors la trajectoire se déroule au lieu de s'enrouler autour de ce dernier, et le résultat est le même). Enfin, on peut observer des **attracteurs chaotiques**, que nous considérerons au § B.3.

Deux bassins d'attraction contigus sont séparés par une ligne formée de points au niveau desquels la trajectoire n'est pas déterminée, et qu'on appelle la **ligne de catastrophes**¹ (cf. Figs. 6.38, 6.40 et 6.42 du livre). Cette ligne (parfois fractale) est un « fil du rasoir » dans le voisinage duquel de petites fluctuations (par exemple aléatoires) peuvent entraîner le système soit vers un des attracteurs, soit vers l'autre.

Lorsque l'espace d'états est de dimension supérieure ou égale à 3, la représentation des trajectoires est difficile et on a recours, pour les caractériser, aux **sections de Poincaré**. On coupe l'ensemble des trajectoires par un plan, et chaque fois qu'une trajectoire traverse ce plan, elle y marque un point. La suite temporelle de points obtenus marque le comportement du système.

Ainsi, si la suite temporelle de points converge vers un point d'accumulation, c'est que la coupe passe par l'attracteur ponctuel, qui est ce point (Fig. B.2A). Si l'attracteur est cyclique, le plan intersecte le cycle limite en deux points d'accumu-

1. « Catastrophe » ne doit pas être entendue au sens de « désastre » ... même en écologie ! Il s'agit (au sens de la **théorie des catastrophes** de René Thom : cf. § 6.6.4.c du livre) du basculement qualitatif du système en direction d'un nouvel attracteur – changement brusque (et souvent imprévu) de sa dynamique.

lation, et les intersections avec la trajectoire se rapprochent alternativement de ces deux points (Fig. B.2B).

Si un système de plus de 2 variables manifeste deux pulsations simultanées et indépendantes, les trajectoires s'enroulent autour de la surface d'un tore (Fig. B.2C). Selon que les deux périodes sont commensurables (leur rapport est un nombre rationnel $\frac{K_1}{K_2}$, K_1 et K_2 entiers) ou non commensurables (rapport non rationnel), la

trajectoire limite est constituée de plusieurs boucles indéfiniment répétées, (on se retrouve au point de départ après K_1 périodes de la première pulsation et K_2 de la seconde), ou bien finit par occuper toute la surface du tore, sans jamais repasser deux fois par le même point. Dans le premier cas, les coupes de Poincaré comprennent un nombre fini de points, répartis sur une courbe fermée qui est l'intersection du plan avec le tore (Fig. B.2.C à droite) ; dans le deuxième cas, elles comprennent cette courbe fermée tout entière.

Nous parlerons au § B.3 des attracteurs chaotiques ou « étranges ».

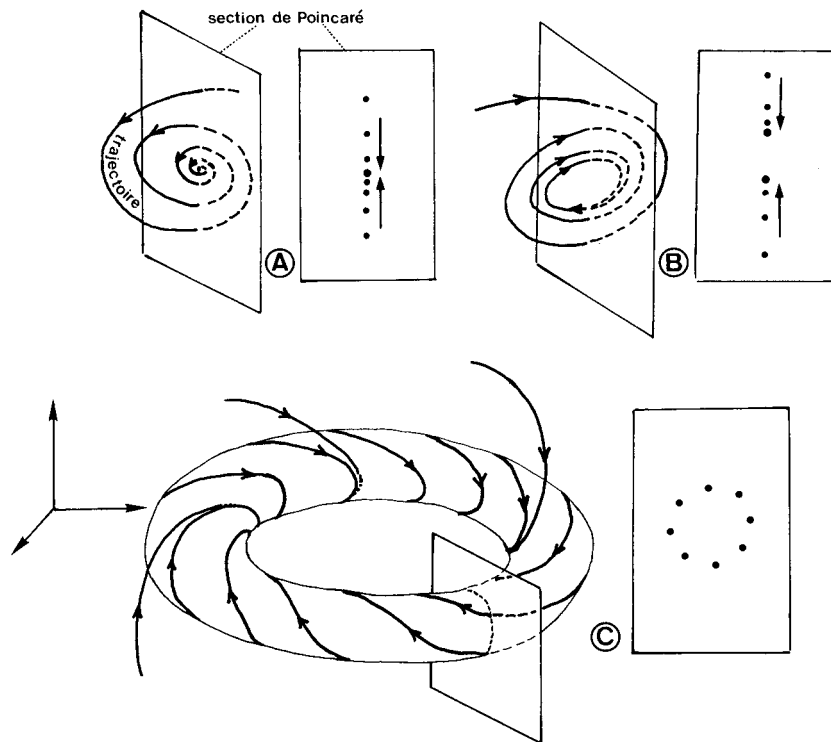


Figure B.2 Allures (à gauche) et sections de Poincaré (à droite) de quelques trajectoires dans l'espace d'états.

A: Trajectoire à attracteur ponctuel. B: Trajectoire à attracteur cyclique. C: Trajectoire à attracteur torique (tore dans \mathbb{R}^3 , deux périodes).

B.2 LA SENSIBILITÉ (*SENSITIVITY*) AUX CONDITIONS INITIALES

Une sensibilité de l'ensemble de la dynamique à de petites fluctuations dites « aléatoires » (voir, pour la définition de ce concept, § 6.9 et note infrapaginale p. 357) existe quand la trajectoire passe à proximité d'une ligne de catastrophes : pour deux localisations très voisines du système à un instant donné, celui-ci peut être localisé dans deux bassins d'attraction différents, et évoluer ensuite différemment. Si une fluctuation imprévisible lui fait traverser la ligne de catastrophes, la dynamique bascule.

Cette imprévisibilité s'étend dans certains cas à l'espace d'états tout entier : deux trajectoires extrêmement proches vont dès lors (après une phase transitoire plus ou moins longue pendant laquelle les deux évolutions sont voisines, voire indiscernables) diverger de façon exponentielle. Partant d'un point connu (mais jamais connu avec une précision infinie), la trajectoire est imprévisible au-delà d'un certain point dit « horizon temporel ». On parle alors de **dynamique chaotique**, localement prévisible mais imprévisible à long terme.

Ce qui est essentiellement nouveau ici, par rapport à l'imprévisibilité concrète, quand elle existe, des systèmes naturels, est que ce type d'imprévisibilité apparaît dans des modèles parfaitement mécanistes et déterministes : on parle de **chaos déterministe**. La disponibilité de grands ordinateurs permet désormais, en effet, d'explorer le comportement des modèles sur des durées (simulées) très grandes, et de démontrer le comportement à long terme des modèles¹ du type envisagé aboutit à une imprévisibilité, sans que l'on ait introduit au préalable le moindre élément aléatoire. L'imprévisibilité pratique provient non de pas la dynamique modélisée, mais de la méconnaissance inévitable du point de départ avec une « précision infinie ».

Deux types de systèmes dynamiques chaotiques sont explorés de façon théorique : des systèmes à temps discret (§ 6.5 du livre), décrits chacun par une équation de la forme $X_i = f(X_{i-1})$, ou de façon plus complète par une **chaîne de Markov** de la forme $X_i = f(X_{i-1}, X_{i-2}, X_{i-3}, \dots)$, et des systèmes à temps continu, décrits par des équations différentielles. Les seconds, cependant, sont discrétisés pour les besoins du calcul informatique : on les simule par pas de temps très petits par rapport à l'échelle de temps du phénomène étudié. Le chaos déterministe apparaît lorsque les équations dynamiques sont non linéaires, et pas seulement dans les systèmes complexes, loin s'en faut : à partir de trois variables simultanées et interactives dans les modèles à temps continu, et d'une seule variable dans les modèles à temps discret (ex. modèle logistique discret : § B.5).

Une trajectoire de l'espace de phase serait rigoureusement déterminée et ce, jusqu'à la fin des temps, si l'on connaissait le point de départ (ou un point intermédiaire quelconque par où passe la trajectoire) avec une précision totale (une infinité

1. Rappelons que la démarche essentielle de la modélisation consiste à explorer les propriétés mathématiques d'un modèle proposé. On ne compare qu'ensuite ces propriétés aux comportements observés sur les systèmes réels (voir § 6.0.3 du livre).

de décimales certaines pour chaque coordonnée de ce point) : condition impossible à réaliser dans la pratique. On ne prévoit donc qu'approximativement, et jusqu'à un « horizon temporel », à partir duquel les trajectoires très proches divergent de façon macroscopique (Fig. B.3). Rapprocher davantage les points de départ en augmentant leur nombre de décimales identiques ne fait que reculer l'horizon temporel, différer la divergence, mais cette dernière apparaît tôt ou tard.

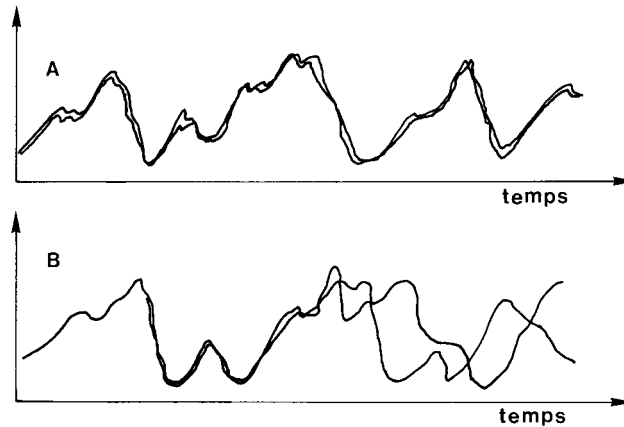


Figure B.3 Évolutions d'une variable à partir de deux conditions initiales non identiques mais très voisines.

A : Dynamique non chaotique : les trajectoires restent voisines. B : Dynamique chaotique (sensibilité aux conditions initiales) : les trajectoires divergent, et deviennent complètement différentes après un certain délai (l'« horizon temporel »).

Dans la pratique, pour prévoir un phénomène réel d'un domaine complexe (un phénomène météorologique par exemple) sur des durées non très petites exigerait de connaître les données antérieures et actuelles avec une précision impossible à obtenir. Le processus ainsi modélisé, même s'il est déterministe par construction, a une allure erratique, sans périodicité apparente précise. Une prévision statistique reste néanmoins possible, de sorte qu'on a pu dire que cette classe de modèles simulait le hasard... et même que l'imprédictibilité liée au chaos était l'essence même de l'aléatoire dans les phénomènes naturels !

Les premiers comportements chaotiques ont été découverts par un météorologue, E. N. Lorenz, il y a une trentaine d'années. Voulant construire un modèle le plus simple possible de la convection atmosphérique, il avait retenu trois équations à trois inconnues – que nous reproduisons ici à seule fin d'en faire apprécier la simplicité :

$$\begin{aligned} X' &= -\sigma(X - Y) \\ Y' &= rX - Y - XZ \\ Z' &= -bZ + XY \end{aligned}$$

Les seules non-linéarités sont les termes XY et XZ . Malgré cette simplicité, le comportement est impossible à prévoir à échéance de 3 ou 4 jours simulés, sauf connaissance exacte des conditions initiales au-delà de toute possibilité pratique (existence d'un réseau de stations météorologiques couvrant la planète avec une maille de 1 km, et relevées toutes les secondes !).

Quant aux modèles discrets, un exemple classique à deux variables est connu sous le nom de « transformation du boulanger », développée dans l'Encart B.1.

Des évolutions de ce type se produisent toutes les fois que, dans les phénomènes naturels, il y a une sensibilité aux conditions initiales, déterminant un chaos déterministe. Deux trajectoires ne peuvent rester indéfiniment voisines : elles divergent tôt ou tard (vers le passé comme vers le futur, vu la symétrie du temps dans ces modèles), si proches qu'elles soient au temps initial. L'imprédictibilité sur le long terme, auparavant mise sur le compte de la seule « variabilité aléatoire » interférant avec le phénomène étudié tout au long de son déroulement, se retrouve ici dans une dynamique purement déterministe. Elle est due à l'impossibilité de connaître avec une infinie précision les coordonnées du seul point de départ, ou d'un point intermédiaire quelconque pouvant servir de nouveau point de départ.

Une trajectoire chaotique ne passe pas, mathématiquement, deux fois par le même point car en ce cas, ce point rigoureusement commun aux deux trajectoires pourrait leur servir de condition initiale commune, et elles coïncideraient alors de $t = -\infty$ à $t = +\infty$. Elle ne montre non plus aucun des comportements cohérents que nous avons reliés plus haut à des attracteurs ponctuels ou cycliques. Par exemple, dans le modèle météorologique de Lorenz, les trajectoires décrivent des spires situées dans deux plans et tournant autour de deux régions moyennes, sans jamais revenir sur elles-mêmes (Fig. B.4). Les deux plans représentent deux types de situations atmosphériques, et la trajectoire saute sporadiquement de l'une à l'autre sans que l'on puisse prévoir le moment d'un saut. Si l'on part de deux situations initiales différentes mais proches, le

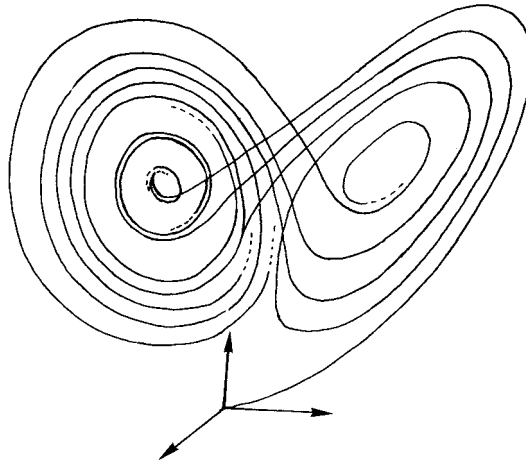


Figure B.4 Allure de l'attracteur de Lorenz (modèle météorologique à trois équations différentielles non linéaires simples).

L'attracteur comprend deux « lobes ». La trajectoire dans l'espace d'états saute d'un lobe à l'autre à des instants imprévisibles, sans aucune régularité, dépendant des conditions initiales. Les seules régularités sont statistiques par exemple, on constate une corrélation entre l'amplitude des boucles et le temps pendant lequel la trajectoire se maintient dans le même « lobe » — exactement comme si le phénomène était aléatoire et non déterministe.

comportement sera du même type, mais les sauts d'un plan à un autre se produiront à des moments différents. Toute prédiction précise est donc exclue ; on ne prévoit que (i) un comportement statistique (pouvant être de deux natures : les deux « lobes »), (ii) l'existence de basculements **catastrophiques** à des instants imprévisibles.

Encart B.1

La « transformation du boulanger »

C'est l'exemple classique d'une sensibilité aux conditions initiales dans un cas discret bivariable (X et Y coordonnées des points intérieurs à un carré de côté 1). Son nom est tiré de la comparaison avec le geste d'un boulanger effectuant plusieurs fois le geste d'étirer sa pâte puis de la replier sur elle-même.

Le processus est schématisé, rapporté à deux dimensions. Un carré de côté 1 est aplati parallèlement à son côté horizontal (il devient un rectangle de largeur 10 et de hauteur 1/10) ; puis est divisé en 10 morceaux¹ (10 rectangles de largeur 1 et de hauteur 1/10) ; enfin ces morceaux sont empilés (et non « repliés » les uns sur les autres, ce qui impliquerait des inversions de sens que l'on évite pour simplifier). Un carré de 1 sur 1 est ainsi reconstitué. On l'aplatit à nouveau, et le processus se répète indéfiniment (voir Fig. B.5).

Supposons que les coordonnées d'un point initial soient :

$$X_0 = 0,347291\dots \quad ; \quad Y_0 = 0,2586\dots$$

Quand on aplatit le carré, la coordonnée X est multipliée par 10, la coordonnée Y est multipliée par 1/10, d'où :

$$X = 3,47291\dots \quad ; \quad Y = 0,02586\dots$$

On coupe le rectangle obtenu en dix morceaux numérotés de 0 à 9 de gauche à droite. Si ensuite on empile les dix morceaux, la nouvelle coordonnée X est comprise entre 0 et 1, en gardant les mêmes décimales ; la coordonnée Y retrouve un premier chiffre non nul après la virgule, ce premier chiffre étant le numéro d'ordre du morceau : 3 dans notre exemple. D'où :

$$X_1 = 0,47291\dots \quad ; \quad Y_1 = 0,32586\dots$$

et ainsi de suite, d'où :

$$X_2 = 0,7291\dots \quad ; \quad Y_2 = 0,432586\dots$$

$$X_3 = 0,291\dots \quad ; \quad Y_3 = 0,7432586\dots$$

$$X_4 = 0,91\dots \quad ; \quad Y_4 = 0,27432586\dots$$

$$X_5 = 0,1\dots \quad ; \quad Y_5 = 0,927432586\dots$$

1. La description habituelle du processus comprend, à chaque étape, une division de l'objet en 2 et non en 10. Cela oblige de l'expliciter en numération binaire. Nous le modifions légèrement ici (le principe restant rigoureusement le même) afin d'utiliser la numération décimale, probablement plus familière au lecteur.

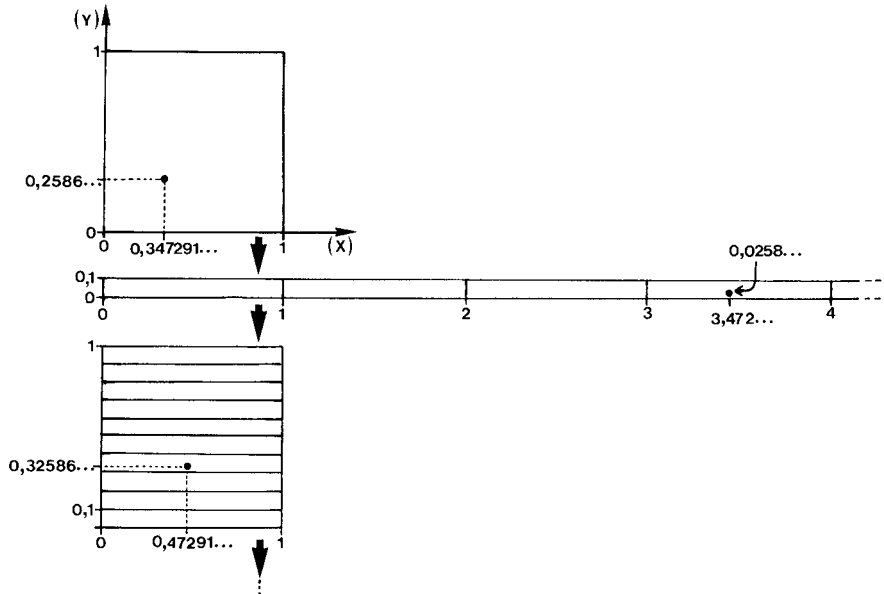


Figure B.5 Transformation du boulanger.

Suivre le texte.

On voit que X perd progressivement ses décimales de la gauche vers la droite, pendant que Y les récupère en tant que premières décimales, mais dans l'ordre inverse de celui des décimales de X_0 . Le processus ne peut être poursuivi au-delà de la 6^e étape, car on a épuisé les décimales connues de X_0 . Si X_0 était connu avec un nombre plus grand de décimales, on pourrait continuer jusqu'à épuisement de ces dernières. Le processus n'est indéfini que si X_0 est donné avec une infinité de décimales.

Si X et Y fournissent une trajectoire par pas discrets (ligne brisée joignant les points successifs) dans un espace d'états à deux dimensions, il faudrait connaître toutes les décimales de l'ordonnée de départ X_0 , ce qui est impossible – sauf s'il est établi que toutes les décimales de X_0 sont nulles à partir d'un certain rang, ou si ces décimales sont périodiques (X_0 est alors un nombre rationnel)... mais cela ne recouvre pas tous les cas.

Si l'on part de deux coordonnées X_0 très proches, ne différant que par les décimales d'un rang supérieur à n (à supposer même que ces décimales soient connues et très nombreuses, et permettent de poursuivre les trajectoires longtemps), la coordonnée Y , à partir de l'étape n , possède comme premières décimales les décimales de X_0 au-delà de n – lesquelles sont indépendantes d'un point de départ X_0 de départ. En d'autres termes, les deux trajectoires sont identiques jusqu'à l'étape n , et ensuite sont complètement indépendantes. Le rang n définit l'« horizon temporel ».

Concrètement, en utilisant l'image du « boulanger », si deux points de départ X_0 sont très proches, les X_i qui suivent resteront très proches l'un de l'autre pendant un certain temps, puis tôt ou tard le couteau de l'artisan les séparera ; à partir de cet instant les deux trajectoires deviendront complètement différentes et indépendantes l'une de l'autre.

Plus précisément, les deux coordonnées X_i vont diverger exponentiellement, puisque d'une étape à la suivante elles sont multipliées par 10 avant qu'on en supprime les chiffres d'avant la virgule. Les coordonnées Y_i vont se rapprocher exponentiellement puisque d'une étape à la suivante elles sont divisées par 10. La première dimension est dite **dimension dilatante** ; la seconde, **dimension contractante** – distinction se retrouvant dans tous les phénomènes relevant du chaos déterministe (d'où les figures générales d'« étirement-repliement » : Fig. B.6 par exemple).

B.3 ATTRACTEURS ÉTRANGES

La situation décrite n'équivaut cependant pas à un constat d'échec. Une certaine régularité statistique peut apparaître, dans laquelle se situe notre capacité de prévoir.

On démontre en effet que chaque fois que des trajectoires divergent, d'autres, venues d'ailleurs, les rejoignent ; ces dernières « divergent vers le passé » (on ne peut pas plus connaître leur passé que prévoir le futur des premières). Il s'ensuit qu'en dépit de l'instabilité des trajectoires individuelles, un **portrait de phase** général, stable et cohérent, apparaît dans l'espace de phases, quand celui-ci est observé sur un temps suffisant. Le désordre n'est pas total – plus exactement, il y a un « ordre dans le chaos » (de Gennes édit., 1987).

La notion d'attracteur se généralise à ce cas, sous le nom d'**attracteur étrange**, défini comme suit : les trajectoires ne se répartissent pas de façon totalement erratique dans l'espace de phases, mais se localisent préférentiellement dans certaines régions, elles-mêmes structurées (c'est-à-dire comportant des parties plus densément occupées que d'autres).

Par exemple, les trajectoires peuvent se maintenir presque toutes à l'intérieur d'un tore (et non plus à la surface, comme pour les attracteurs cycliques : Fig. B.6.a). Cette structure est hiérarchique, constituée de figures emboîtées : si, pour analyser l'écheveau de trajectoires, on intersecte le tore par un plan de Poincaré, on obtient alors une figure comportant des étirements et repliements de toutes les zones densément occupées, rappelant les figures obtenues dans les mélanges turbulents de fluides (Fig. B.6.b). La structure est évidemment statistique : aucune trajectoire ne repasse deux fois par le même point, deux trajectoires ne se superposent jamais et cependant, d'un essai à l'autre, on retrouve le même portrait de phases macroscopique à structure emboîtée (Fig. B.6.c à e).

On assiste là à un *changement d'échelle du déterminisme*. À micro-échelle : grand désordre et imprédictibilité des trajectoires. À échelle globale, et en considérant l'évolution sur une durée assez longue : régularités statistiques reproductibles

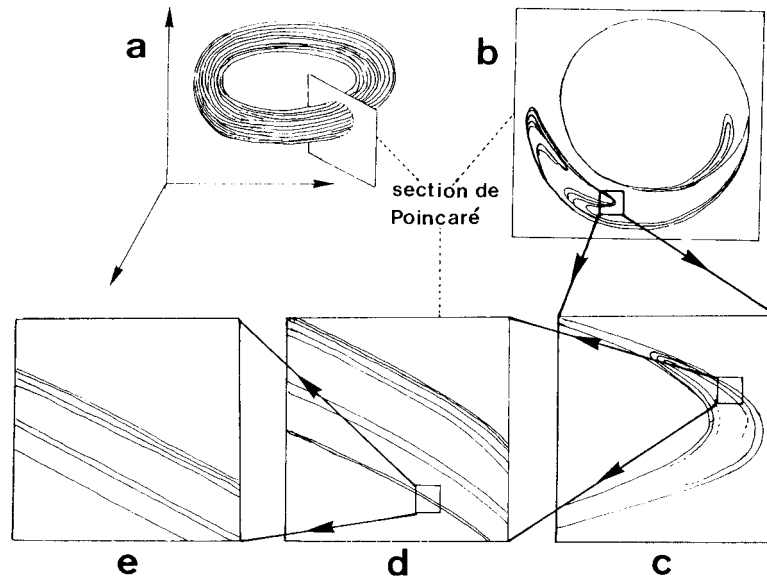


Figure B.6 Allure d'un attracteur étrange.

a) Aspect de la trajectoire dans l'espace d'états à n dimensions (n variables simultanées). La trajectoire ne passe jamais deux fois par le même point.

b) à e) : Section de Poincaré choisie au hasard dans le tore global, représentée à plusieurs grandissements.

On reconnaît les figures d'étirement de repliement caractéristiques de la dynamique chaotique et se retrouvant tant dans l'espace physique (figures de turbulence hydrodynamique) que dans les espaces de phases. La structure d'ensemble est fractale.

et reconnaissables. À partir de n'importe quelles conditions initiales, le même portrait d'attracteur étrange est obtenu, avec les mêmes régions de l'espace de forte densité d'occupation, la même structure emboîtée de ces régions. Il s'agit bien d'un attracteur, ni ponctuel ni cyclique, structurellement stable mais indéterminé dans son détail¹.

L'attracteur étrange a une géométrie. Les phénomènes d'étirement-repliement (Fig. B.6b) sont expliqués par les comportements simultanés d'une **dimension contractante** et d'une **dimension dilatante** (voir Encart B.1 sur la transformation

1. On a remarqué que ce détail (imprévisible mais déterminé, répétons-le) pouvait être décrit en termes statistiques. Rien (sauf parfois des analyses spectrales sur des suites de valeurs) ne permet de distinguer, à échelle d'observation macroscopique, un tel phénomène d'un phénomène aléatoire : **le chaos simule le hasard**. Du point de vue phénoménologique, les deux descriptions peuvent être adoptées. Dès lors le problème de la signification du hasard se trouve à nouveau posé – avec deux écoles : celle qui affirme que le hasard existe à chaque instant, et celle qui le nie et attribue les comportements erratiques à un déterminisme caché (Amsterdamski *et al.*, 1990).

du boulanger prise comme exemple). On peut montrer qu'une petite tache (petit domaine borné centré en un point quelconque de l'espace d'états) subit un étirement, devient filiforme, en même temps se replie de nombreuses fois dans l'espace et finit par se perdre dans l'écheveau des trajectoires (cf. de Gennes édit., 1987).

L'attracteur possède en fait, dans son ensemble, une géométrie fractale (cf. Annexe A). Si l'on examine en détail une portion d'attracteur, on constate une structure (nous avons parlé d'une structure feuilletée, mais il y en a d'autres). Si l'on examine plus en détail encore une région qui semblait homogène, on s'aperçoit qu'elle est en réalité structurée, avec souvent des figures rappelant les figures macroscopiques du même attracteur ; et ainsi de suite indéfiniment. Ces structures sont emboîtées, mais non exactement répétées d'une échelle à l'autre comme c'est le cas dans les fractales régulières. Enfin, l'attracteur étrange peut comporter plusieurs parties distinctes, la trajectoire sautant (bien sûr, de façon imprévisible) d'une partie à l'autre. Les frontières entre ces différentes parties constituent des « lignes (elles-mêmes fractales) de catastrophes » d'un nouveau genre.

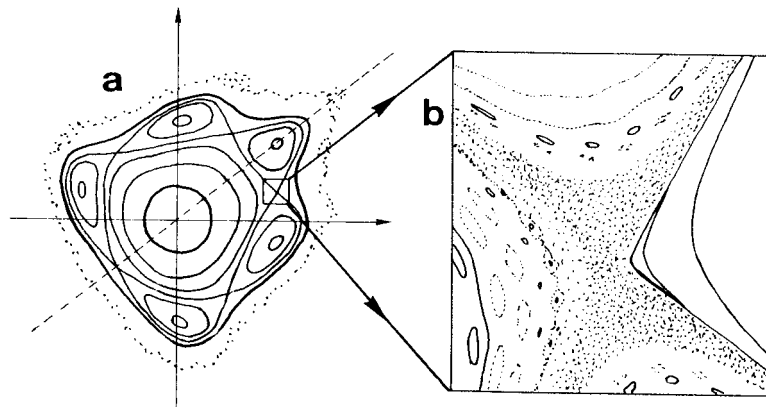


Figure B.7 Section de Poincaré de l'attracteur de Hénon.

L'attracteur étrange a) est obtenu à partir de deux équations de récurrence non linéaires simples. La figure a été construite avec plusieurs trajectoires. Chaque point représente l'intersection d'une trajectoire avec le plan de Poincaré. Lorsque ces points sont très serrés, ils donnent l'impression d'une courbe continue dans le plan. Les équations de départ ne permettent pas de prévoir les quasi-symétries constatées après un nombre extrêmement grand d'itérations, ni la structure fractale visible sur des agrandissements de la figure b). Ces structures macroscopiques sont indépendantes des conditions initiales, contrairement aux trajectoires individuelles. On ne les met en évidence qu'empiriquement, par calcul informatique (« mathématiques expérimentales »). Elles évoquent un déterminisme global (origine de la **stabilité structurelle**), en quelque sorte indépendant du déterminisme microscopique introduit dans les équations. Modifié de Ekeland (1984).

Parfois les structures sont encore plus « étranges » car elles font apparaître des silhouettes complexes mais cohérentes, montrant des quasi-cycles et des quasi-symétries que rien, dans les équations de départ, ne permettait de présumer. Nous reproduisons à la Fig. B.7 l'attracteur de Hénon, obtenu lui aussi à partir de quelques

équations très simples itérées indéfiniment, et qui fait apparaître un quasi-axe de symétrie¹, faisant un angle déterminé avec les axes de coordonnées.

En résumé, l'« étrangeté » des attracteurs chaotiques tient à deux caractères : (i) un processus simple et rigoureusement déterministe donne lieu à un comportement global extrêmement complexe, imprévisible dans son détail ; (ii) au-delà des trajectoires particulières imprévisibles, ce comportement global comporte un « ordre caché », non introduit explicitement dans les équations de départ, mais autorisant une permanence statistique du phénomène. Parmi ces régularités statistiques et reproductibles, des basculements « catastrophiques » dont on sait qu'ils vont se produire, mais sans qu'on puisse prévoir à quel moment.

Deux échelles d'observation sont ainsi clairement distinctes dans la dynamique du système : une micro-échelle où cette dynamique est déterministe par construction, bien qu'imprévisible en raison de la sensibilité aux conditions initiales ; une macro-échelle où cette dynamique est reproductible, mais seulement statistiquement.

B.4 QUELLES LEÇONS EN TIRER POUR LA THÉORIE DES SYSTÈMES ?

On pouvait penser, jusqu'à la découverte du chaos déterministe, que les équations simples (proposées au titre d'une simplification des phénomènes, afin de pouvoir les étudier) aboutissaient *de facto* à un comportement dynamique simple. On faisait l'hypothèse supplémentaire que le modèle ainsi élaboré fournissait une image simplifiée du phénomène réel, et que de petites complexifications (ajout d'une ou de quelques variables ou paramètres) le rapprochaient de la réalité — expliquant par exemple une partie du bruit de fond, les grandes lignes étant conservées. Ces hypothèses reflètent une « philosophie linéaire ».

La pratique des modèles non linéaires a vite montré qu'au contraire :

- (i) Une dynamique extrêmement compliquée peut résulter d'un petit nombre d'équations simples et déterministes.
- (ii) L'image ainsi obtenue diffère tellement du comportement des modèles simples, qu'il n'est plus possible d'admettre que ces derniers représentent une approximation de la dynamique complexe. Celle-ci ne saurait s'obtenir par simple ajout (philosophie linéaire) d'un ou de quelques termes pour le « préciser ».
- (iii) La dynamique nouvellement obtenue a des caractères la rapprochant souvent d'un processus aléatoire : étant *imprévisible* en raison de la sensibilité aux conditions initiales, elle paraît être *indéterminée*. De ce fait, elle se prête aux sondages et aux échantillonnages selon les méthodes statistiques.

1. Non pas un *vrai* axe de symétrie, car dans ce cas un point A' symétrique de A serait occupé après un temps Δt , et A serait à nouveau occupé après $2 \cdot \Delta t$. La trajectoire passerait donc deux fois par le même point, donc la dynamique serait cyclique et non chaotique.

L'imprévisibilité ne permet plus par elle-même de décider entre déterminisme et indéterminisme. En fait, c'est la signification même du hasard qui doit être reconsidérée : l'aléatoire peut être vu comme un déterminisme relevant de causes nombreuses, simultanées et indépendantes, qu'on ne peut pas toutes connaître (notamment parce que certaines relèvent d'autres échelles d'observation).

- (iv) L'effet le plus immédiatement visible de la non-linéarité d'un système d'équations est la sensibilité aux conditions initiales, impliquant que de petites fluctuations peuvent provoquer des variations importantes du phénomène central. On retrouve la phénoménologie de la théorie des catastrophes, mais étendue à tout l'espace de phases (ou du moins à des parties densément occupées de celui-ci).
- (v) Le déploiement de l'attracteur étrange fait apparaître un « ordre caché », non explicitement introduit dans l'écriture des équations de départ. L'attracteur révèle des régions de l'espace de phases où les trajectoires passent plus fréquemment, ce qui peut être traduit en termes de probabilités, autorisant une prévision statistique du phénomène, sans qu'on ait à se demander s'il est déterministe ou stochastique. Cette vision est conforme à celle que l'on a de beaucoup de phénomènes naturels.

Mais cet ordre caché n'apparaît qu'après un nombre extrêmement grand d'itérations – véritable « mathématique expérimentale » praticable seulement au moyen des très gros ordinateurs. La figure (portrait de phases) « étrange » apparaît dans la section de Poincaré lorsque la trajectoire a accompli des milliers de boucles, ses détails apparaissent progressivement à mesure que croît le nombre de boucles parcourues. Sa structure apparaît alors fractale. En outre, les figures s'organisent selon des régularités géométriques, comme des quasi-symétries ou des motifs approximativement répétés (jamais exactement).

Ces caractères paraissent justifier une échelle d'observation macroscopique, où les choses peuvent être décrites indépendamment de leur déterminisme microscopique. L'apparence globale de l'attracteur étrange témoigne d'**une émergence de formes** (formes floues, complexes, néanmoins descriptibles, non déductible mathématiquement du niveau microscopique, même pas statistiquement comme cela a lieu en thermodynamique statistique).

Cette dernière conclusion est fondamentale pour tout ce qui touche à la biologie puisque, précisément, les phénomènes biologiques cruciaux (l'organisation du niveau moléculaire en un niveau cellulaire, l'intégration des cellules en un organe fonctionnel, des organes en un organisme etc.) défient toute prévision statistique¹.

- (vi) On pourrait enfin penser que, si le modèle sous-jacent se complexifie, le phénomène macroscopique atteint une complexité indescriptible. Or nous constatons dans les phénomènes réels (climatologiques, océanographiques, biologiques, écologiques...) – dans la mesure où on arrive à les appréhender – une complexité

1. La dynamique des populations tente une prévision statistique des propriétés des populations à partir de celles des individus, mais nous avons insisté sur ses insuffisances (§§ 6.6.4 et 6.7 du livre).

du même ordre que celle observée dans les modèles simples, pour peu qu'ils soient non linéaires. On en déduit :

- soit que les phénomènes naturels, en dépit de leur enchevêtrement, sont chacun déterminés par un *petit* ensemble de facteurs (les autres facteurs en présence étant peu déterminants) ; leur complexité et leur imprévisibilité ne sont attribuables qu'à une dynamique chaotique liée à quelques variables :
- soit que la complexité du niveau macroscopique est bel et bien indépendante des phénomènes microscopiques, aussi nombreux et enchevêtrés soient-ils. Le niveau macroscopique montre une dynamique propre, et un déterminisme à son échelle d'observation propre.

La seconde hypothèse n'est pas contradictoire avec l'idée intuitive que nous avons aujourd'hui des phénomènes biologiques. Les propriétés des cellules vivantes peuvent être décrites (parfois très précisément) sans référence au détail (indescriptible) des mouvements moléculaires. Ce n'est qu'à un niveau très faible d'organisation qu'un système vivant peut être précisément analysé en ses composantes. Le chaos déterministe nous permet d'entrevoir comment une entité et un fonctionnement globaux peuvent se faire jour quand le nombre des composants et des interactions devient inconcevable. *La théorie du chaos constitue une théorie de l'émergence.*

B.5 DYNAMIQUE CHAOTIQUE ET ÉCOLOGIE

Des phénomènes chaotiques sont « suspectés » en écologie depuis les années 80 (Schaffer, 1985 ; Schaffer & Kot, 1985, 1986 ; Margalef, 1986). Deux voies ont été explorées : l'une concernant l'effet des phénomènes physiques chaotiques, notamment de la turbulence hydrodynamique, sur le fonctionnement et les performances des systèmes écologiques ; l'autre concernant la dynamique des populations et les caractères chaotiques des fluctuations temporelles de certaines variables démographiques.

B.5.1 Phénomènes physiques chaotiques et écologie

Les dynamiques chaotiques intéressent, on le sait aujourd'hui, une large classe de phénomènes physiques et chimiques. Elles concernent donc beaucoup de phénomènes écologiques, fondés sur des interactions entre phénomènes physiques, chimiques et biologiques, notamment ceux liés à l'énergie auxiliaire de l'écosystème (§ 1.4 du livre). Parmi ces derniers, les mélanges turbulents de fluides jouent un rôle important en rapprochant les éléments potentiellement interactifs (théorie de la « covariance » : § 1.4.1.d du livre). Nous renvoyons, par exemple, aux figures publiées par Ottino (1989) de mixages de fluides de couleurs différentes, évoquant fortement la « transformation du boulanger » avec ses alternances d'étirements et de repliements, aboutissant à une structure feuilletée.

Effectivement, la structure verticale d'une masse d'eau lacustre ou marine (structure thermique par exemple) nous apparaît aujourd'hui, grâce à la finesse des techniques de mesure, non pas homogénéisée par le mélange et la diffusion, mais

« feuilletée » suite à des cisaillements, des laminages et des repliements incessants à toutes les échelles (§ 1.5.3.c du livre). Cette structure est particulièrement importante dans les situations d'interfaces, par exemple au voisinage des *upwellings* qui rapprochent une eau froide riche en sels nutritifs et une eau chaude riche en cellules phytoplanctoniques (cf. § 1.5.3.e du livre : Fig. 1.25). Le mélange turbulent a pour effet d'augmenter dans des proportions considérables la surface de contact entre les deux masses d'eau, et ce très rapidement. Partant de mouvements d'eau de l'ordre du mètre, dans une situation de cisaillements, il ne faut que 15 étirements-repliements successifs pour arriver à des « feuillets » de l'épaisseur d'une cellule de 20 μm (Diatomée), qui se trouve dès lors plongée dans son eau chaude d'origine et néanmoins en contact direct avec l'eau froide et ses sels nutritifs. En écologie continentale, c'est le renouvellement des surfaces de contact entre tissus vivants (feuilles) et atmosphère qui est accéléré par ce processus, intensifiant ainsi les échanges d'oxygène et de dioxyde de carbone.

La quantification et la modélisation de ces actions, toutefois, commence à peine à être abordée¹.

B.5.2 Modèles de dynamique des populations

Ces fluctuations chaotiques semblent confirmées par une approche mathématique tentant de simuler de longues séries stochastiques à partir de modèles de croissance de populations ou de modèles proies-prédateurs :

- (i) Les modèles à temps continu (équations différentielles) de plus de deux espèces font apparaître des comportements chaotiques – à la faveur desquels deux espèces en compétition peuvent coexister, alors qu'elles s'excluraient si elles étaient sans troisième partenaire (voir par exemple Hastings & Powell, 1991).
- (ii) Des dynamiques chaotiques apparaissent pour une seule espèce dans les modèles à temps discret de la forme $N_{t+1} = f(N_t)$ (où N_t est le nombre d'individus d'une population au temps t). Le fait a été décrit pour la première fois dans l'exemple historique de May (à partir de 1975), issu de la loi logistique discrète (cf. § 6.5.1 du livre) :

$$N_{t+1} = a \cdot \left(1 - \frac{N_t}{K}\right) \cdot N_t$$

ou, en posant $x = \frac{N}{K}$ et $a \cdot K = r$:

$$x_{t+1} = r \cdot x_t \cdot (1 - x_t)$$

L'équation simule les variations d'effectifs d'une génération à l'autre, chez une espèce dont les générations ne se recouvrent pas (Insecte ne vivant qu'une seule saison, et ne se reproduisant qu'une fois par an).

Le modèle est instructif : on voit se construire l'attracteur étrange et naître la complexité, à partir de prémisses simples (et même caricaturalement simples !).

1. La liaison turbulence-biologie avance plutôt, actuellement, en relation avec la **théorie des multifractales**, non abordée dans ce livre (Seuront *et al.*, 1998 et suiv.)

Nous n'en donnons pas le détail ici, car il est amplement décrit et commenté dans un grand nombre d'ouvrages récents (pratiquement sans différence d'un auteur à un autre ; il suffit donc d'en lire un : voir par exemple Croquette *in* de Gennes édit, 1987 ; Bergé *et al.*, 1988 ; Gleick, 1989 ; Falconer, 1990 ; Feder, 1990 ; Schroeder, 1991 ; Becker & Dörfler, 1991 ; Manneville, 1991 ; Peitgen *et al.*, 1992 ; etc.), qui en tirent des conséquences épistémologiques. Les performances du modèle sont évidemment déduites des calculs informatiques (une fois de plus, on n'étudie que les propriétés *du modèle*). Résumons-en les grandes lignes : selon les valeurs du paramètre r , l'abondance N ,

- ou bien tend vers une limite (soit 0, soit N_∞) ;
- ou bien subit des oscillations et tend vers un ou plusieurs cycles limites ;
- ou bien devient chaotique.

Plus précisément :

- pour r compris entre 1 et 3, il y a un cycle limite : la population montre alternativement une forte et une faible densités ;
- pour $r = 3$, le cycle « éclate » brusquement en deux cycles : la population passe par des maxima et des minima, les uns et les autres alternativement faibles et forts ;
- puis on observe une « cascade » fractale. Pour r voisin de 3,4495, les deux cycles éclatent en quatre ; pour une valeur un peu supérieure, en huit cycles ; et ainsi de suite pour des valeurs de r croissantes mais de plus en plus rapprochées ;
- brusquement encore, quand r atteint la valeur critique de 3,56994571869..., les cycles multiples font place à un comportement chaotique, dans lequel aucune période n'est décelable ;
- puis on retrouve des cycles (par trois) à partir de $r = 3,6786...$, puis à nouveau du chaos, etc.

L'attracteur global a une allure bien connue, que nous pensons inutile de reproduire ici car il est souvent représenté (voir ouvrages sus-mentionnés). Il évoque une arborescence parfois appelée le « figuier »¹.

Précisons que, lorsqu'on veut représenter graphiquement l'attracteur, on doit supprimer les 500 ou 1 000 premières itérations, qui représentent des états transitoires et masquent l'allure finale. En écologie (à supposer que le pas de temps soit interprétable en termes de générations successives), il faudrait admettre que les conditions ambiantes et l'état de l'écosystème restent inchangés pendant 500 à 1 000 ans, pour que l'on puisse observer, passé ce délai, une allure de l'attracteur ! Connaissant la variabilité très générale attachée aux écosystèmes, il est plus vraisemblable que nous n'observions jamais *que des régimes transitoires au sein d'une dynamique perpétuellement remise en question*, conforme à l'évolution de tout écosystème (cf. Cha-pitre 9 du livre).

1. Par référence à Mitchell Feigenbaum (dont le patronyme signifie « figuier » en allemand), qui en a établi une première formulation mathématique : cf. Schroeder (1991), p. 274.

B.5.3 Séries temporelles chaotiques en écologie et épidémiologie

La mise en évidence d'un phénomène chaotique peut se fonder sur des **séries temporelles** de données, c'est-à-dire d'observations par pas de temps discrets d'une variable d'état $X(t)$ fluctuant dans le temps. En effet (pour des raisons mathématiques que nous ne pouvons développer ici : voir par exemple Bergé *et al.*, 1988 ; Ruelle, 1991 ; Manneville, 1991), les caractéristiques principales du portrait de phase peuvent être déduites des graphes des fonctions de récurrence $X_{t+1} = f(X_t)$, t variant par pas d'une unité.

On recherchera donc des séries temporelles de mesures pour les analyser en ce sens. Malheureusement, de telles séries doivent être très longues pour donner des résultats significatifs concernant la dynamique chaotique censée les sous-tendre : plusieurs milliers ou centaines de milliers de mesures successives sont nécessaires, ce qui est réalisable pour des variables physiques ou physiologiques, grâce aux enregistrements automatiques possibles aujourd'hui. En écologie, une « longue série » comprend quelques dizaines ou, au mieux, centaines de mesures ! Outre cette impossibilité pratique, une dynamique écologique ne se réalise jamais dans des conditions constantes sur de très longues durées : l'écosystème, on le sait, s'adapte et ne reste pas identique dans le temps (tout en restant « le même » : cf. Épilogue du livre). Il est donc exceptionnel que des conditions écologiques restent identiques un temps suffisant pour qu'un régime chaotique non seulement soit observable, mais ait le temps de s'établir – c'est-à-dire qu'un attracteur étrange devienne manifeste. Les chances sont bien plus grandes d'observer des régimes transitoires en incessante adaptation.

Certaines longues séries de données écologiques ou épidémiologiques existent toutefois. Boudjema *et al.* (1995, 1996) démontrent l'existence d'attracteurs chaotiques bien identifiables dans les enregistrements de statistiques concernant les fourrures commerciales au Canada¹, les cernes annuels des troncs des Bouleaux de Laponie, les écailles de Sardines sédimentées dans le Pacifique, ou les épidémies de coqueluche et d'oreillons en Grande-Bretagne.

1. Des séries temporelles de systèmes proies/prédateurs, d'allure erratique et ne vérifiant pas les modèles de type Lotka-Volterra avaient déjà été signalées. Celles concernant les fluctuations des captures de lièvres et de lynx suscitèrent un article au titre humoristique : « Les lièvres mangent-ils des lynx ? » (Gilpin, 1973).